

1) $\tan(\pi/2) = N'$ existe pas (C 101e)

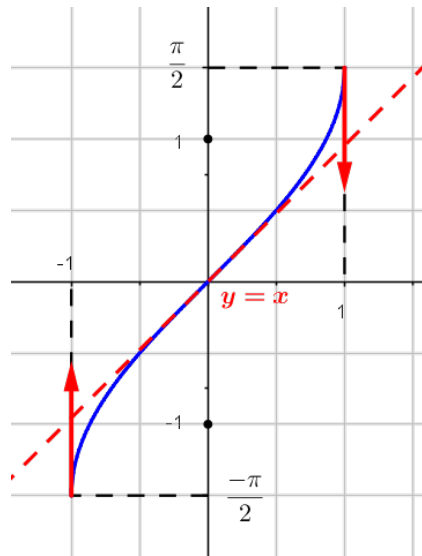
2) $\tan x \geq -1 \iff \frac{-\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ (C 176b)

3) $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx = (e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n$ (C 246b)

4) Dans \mathbb{C} , les racines 4^{ème} de l'unité sont $1, -1, i, -i$ (C 324)

5) $(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ (C 421b)

6) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \arcsin x$ (C 450)



7) (u_n) géométrique de raison $q \notin \{0, 1\}$ (C 515a)

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \frac{u_p - u_{n+1}}{1 - q}$$

- Les deux formules sont à connaître et sont équivalentes puisque $u_p q^{n-p+1} = u_{n+1}$
- Ne pas oublier le premier terme u_p car la somme commence avec $k = p$ (et non $k = 0$)

8) Suite récurrente linéaire ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (C 545d)

à valeurs dans \mathbb{R} . Cas $\Delta < 0$: les solutions réelles sont de la forme :

$$u_n = \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta) \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

et $r_1 = \alpha + i\beta = \rho e^{i\theta}, \quad r_2 = \alpha - i\beta = \rho e^{-i\theta},$

racines (conjuguées) de l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$

9) Vrai ou Faux ? **Faux** (C 581d)

Pour $x \in \mathbb{R}, \quad x \geq -3 \Rightarrow x^2 \leq 9$

par exemple pour $x = 4$

10) Définition de la factorielle : $\begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n! \end{cases}$ (C 620)

Dans une définition par récurrence il faut 1) une relation de récurrence, et ne pas oublier 2) l'initialisation

11) Négation de $\exists x \in E, \forall y \in F, (x \geq y)$ et $(x^2 \neq 3)$ (C 709c)

$$\forall x \in E, \exists y \in F, (x < y) \text{ ou } (x^2 = 3)$$

12) A est un ensemble. Schéma de démonstration de : $A = \emptyset$ (C 746)

Soit $x \in A$

[blabla]

Impossible

Donc $A = \emptyset$

13) Limite particulière avec sin : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (C 806a)

14) $f'(x_0) = a \neq 0 \iff f(x_0 + h) - f(x_0) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a.h$ (C 827c)

15) Démontrer : $f + g \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f = o(g)$ (C 832c)

$$f + g \underset{a}{\sim} g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow f = o(g) \text{ en } a$$

16) Tableau de variations complet de \arctan (C 907c)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
\arctan		0	$+\pi/2$
		\nearrow	
	$-\pi/2$		

17) $\arcsin x > \frac{\pi}{3} \iff 1 \geq x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ (C 924)

car \arcsin est définie sur $[-1, 1]$ $\Rightarrow x \in [-1, 1]$
et \arcsin strictement croissante : $\arcsin x > \pi/3 \iff x > \sin(\pi/3)$

18) Théorème de la bijection (Sans parler de la réciproque) (C 1030a)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I

Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$

19) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x|$ (C 1063)

sur $\left] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{+\pi}{2} + k\pi \right[, k \in \mathbb{Z}$

pas sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
car les primitives doivent être définies sur des intervalles

20) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 4} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 2^2}$ (C 1069c)

$$= \int \frac{dx}{4 \left[\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 + 1 \right]} = \frac{2}{4} \int \frac{(1/2) \, dx}{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x-2}{2} \right) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

21) **formule de changement de variable pour les intégrales** (C1102a)

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \, du$$

avec a, b dans un intervalle I , φ de classe C^1 sur I
et f continue sur $\varphi(I)$

Rien ne nécessite d'avoir $a \leq b$ (c'est une égalité donc pas besoin des BBS). Donc vous ne pouvez parler de l'intervalle $[a, b]$. On se place donc sur un intervalle I contenant a et b

22) Les solutions de l'équation $y' + a.y = 0$ avec $a \in \mathbb{C}$ (C 1131c)
sont de la forme $y(x) = K.e^{-ax}$ avec $K \in \mathbb{C}$

23) L'équation $y' - \frac{2}{x}.y = 0$ (E_0) (C 1134b)

a pour solutions $y_0(x) = Cx^2$ avec $C \in \mathbb{C}$

Déterminer les solutions de l'équation $y' - \frac{2}{x}.y = 2x^3$ (E)

On cherche une solution particulière $y_P(x) = C(x)x^2$

$$\Rightarrow y'_P(x) = C'(x)x^2 + C(x)2x$$

$$(E) \iff C'(x)x^2 + C(x)2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = 2x^3$$

$$\iff C'(x)x^2 = 2x^3 \iff C'(x) = 2x \Rightarrow C(x) = x^2$$

$$\Rightarrow y_P(x) = y_P(x) = x^4 \Rightarrow y(x) = Ax^2 + x^4$$

24) Soit (u_n) une suite réelle et A un réel (C 1201e)

Traduire en français la proposition suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq A \iff \text{la suite } (u_n) \text{ est minorée par } A$$

25) Vrai ou faux ? ... **Vrai** (C 1227b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|$$

26) Définition Les suites u et v sont adjacentes si (C 1234a)

- L'une des deux suites est croissante
- l'autre est décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$

27) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n)}(\mathbb{K})$, A est triangulaire supérieure (C 1602a)

$$\iff \forall (i,j) \in [[1,n]]^2, i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

28) Définition : Une matrice A est symétrique (C 1622a)

$$\iff {}^t A = A \iff \forall i,j \in [[1,n]], a_{i,j} = a_{j,i}$$