1) Écrire sous la forme $a.b^n.c^k$ avec $a,\ b,\ c$ constantes (C 018d)

$$\frac{\alpha^{2n-k+1}}{(\beta^{2k+n})^3} = \frac{\alpha^{2n-k+1}}{\beta^{6k+3n}} = \frac{\alpha^{2n}\alpha^{-k}\alpha}{\beta^{6k}\beta^{3n}} = \alpha\left(\frac{\alpha^2}{\beta^3}\right)^n\left(\frac{\alpha^{-1}}{\beta^6}\right)^k$$

2) $-\cos(x) = \sin\ (-\frac{\pi}{2} - x) = \sin\ (-\frac{\pi}{2} + x)$ (C 111b)

3) $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*,\ \dfrac{\arg(z)}{\arg z'} =$ PFC (C 230b)

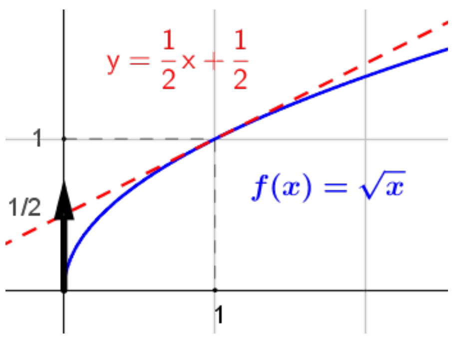
4) <u>Définition</u> : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{U}_n$ (C 320c)
$\iff\ z^n = 1 \iff z$ est racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité

On demande la <u>définition</u> pas la propriété

5) $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = (-n)x^{-n-1} = \boxed{\dfrac{-n}{x^{n+1}}}$ (C 409)

6) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ (C 443a)

Tangente verticale en 0



7) (u_n) arithmétique de raison r : $u_n = u_1 + (n-1).r$ (C 510a)

8) Suite récurrente linéaire ordre 2 à valeurs dans $\mathbb{C}$ (C 540b)
$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, (a,b) \in \mathbb{C}^2\ .$$
<u>Cas $\Delta = 0$</u> : Les solutions <u>Complexes</u> sont de la forme :

$$u_n = r_0^n(\lambda + \mu.n) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C})$$

avec r_0 racine (double) de l'équation $r^2 - ar - b = 0$

9) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ (C 565b)
$\forall x \in \mathbb{R},\quad x \in [a-r,\ a+r] \iff \underline{|x-a| \leq r}$

$x \in [a-r,\ a+r] \iff a - r \leq x \leq a + r \iff -r \leq x - a \leq +r \iff |x-a| \leq r$

10) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (C 603c)

$\forall x \in \mathbb{R},\quad \lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$

Par exemple : $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$ et $\lfloor 1.5 \rfloor = 1$

11) Contraposée de $(P \Rightarrow Q)$: (non-$Q \Rightarrow$ non-P) (C 702)

12) $x \notin A \cap B \iff x \notin A$ OU $x \notin B$ (C 742a)

Ecrire « x n'appartient pas à A et B » n'a aucun sens logique

13) Équivalent avec <u>$x \to 1$</u> de $\sqrt{\ }$ (C 805d)

$$\sqrt{x} - 1 \underset{x \to 1}{\sim} \frac{1}{2}(x-1)$$

14) Montrons que $\forall x \leq 0,\quad 0 < a \leq b \Rightarrow a^x \geq b^x$ (C 810e)

(Rappel : on a $a^x = \mathrm{e}^{x.\ln a}$)

Soit $x \geq 0$. Supposons $0 < a \leq b$

$\Rightarrow\ \ln a \leq \ln b$ (car ln croissante sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow\ x.\ln a \geq x.\ln b$ car $x \leq 0$

$\Rightarrow\ \mathrm{e}^{x.\ln a} \geq \mathrm{e}^{x.\ln b}$ car exp croissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow\ a^x \geq b^x$

15) $f'(x_0) = a \neq 0 \iff f(x_0 + h) - f(x_0) \underset{h \to 0}{\sim} a.h$ (C 827c)

16) arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$ (C 908a)

17) Définition : $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement croissante sur I (C 1000d)

$\iff \quad \forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y)$

18) Soit f continue et strictement décroissante sur l'intervalle $I = \left[a,\ b\right[$
Alors f réalise une bijection ... (C 1030c)

de $I = \left[a,\ b\right[$ sur $J = f(I) = \left] \lim\limits_{x\to b} f(x); f(a)\right]$

Explications
• f est décroissante donc il faut inverser les bornes dans $f(I)$.
• f définie sur $\left[a, b\right[$, donc pas définie en b. $f(b)$ n'existant, il faut remplacer par la limite.
• Par contre f est définie en a, donc pas besoin de chercher la limite en a

19) On donne le tableau de variations suivant : (C 1034c)

x	1	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	-3

Justifier ce qu'on peut dire de l'équation $f(x) = 2$ sur $[1; +\infty[$

D'après le TV $f(2) = 3$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$

- f est continue et strictement décroissante sur $I =]1,\ +\infty[$
  Donc f réalise une bijection de $I =]1, +\infty[$ sur $f(I) =]-3,\ +\infty[$
- Or $2 \in f(I)$
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution x dans $]1,\ +\infty[$

Noter les intervalles ouverts car f n'est pas définie en 1

20) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x$ sur $]-\pi/2 + k\pi,\ \pi/2 + k\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$ (C 1064)

Attention : Une primitive doit toujours être définie sur des <u>intervalles</u> Donc écrire « sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi\}$ » est incorrect

21) Différentielle : $\mathrm{d}(u^3) = \quad 3u^2\ \mathrm{d}u$ (C 1103a)

22) Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ avec $u = \cos x$ (C 1104a)

$u = \cos x \Rightarrow\ \mathrm{d}u = -\sin x\ \mathrm{d}x$ Bornes : $\begin{cases} x = \pi & u = \cos\pi = -1 \\ x = 0 & u = \cos 0 = 1 \end{cases}$

$$I = \int_1^{-1} \frac{-\ \mathrm{d}u}{1+u^2} = [-\arctan u]_1^{-1} = -\arctan(-1) + \arctan(1) = \pi/2$$

23) $y' + a.y = \mathrm{e}^{\lambda x} P(x)$ avec $P(x)$ un polynôme de degré n (C 1132b)
On cherche une solution particulière y_1 de la forme

- 1er cas : si $\underline{\lambda \neq -a}$ alors $\underline{y_1(x) = Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}}$
- 2ème cas : si $\underline{\lambda = -a}$ alors $\underline{y_1(x) = Q(x)x.\mathrm{e}^{\lambda x}}$

avec $Q(x)$ polynôme de degré n

24) Soit (u_n) une suite réelle. (C 1201c)

$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \quad \iff \quad$ La suite (u_n) est minorée

La proposition « $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$ » <u>ne dépend pas</u> de m (puisqu'il y a un quantificateur devant). Donc écrire « La suite (u_n) est minorée <u>par m</u> » est FAUX.

25) Vrai ou faux ? ...**Faux** (C 1227a)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \iff \quad \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$

L'implication est vraie, la réciproque est fausse. Exemple : $u_n = (-1)^n$

26) Définition Les suites u et v sont adjacentes si (C 1234a)

- L'une des deux suites est croissante
- l'autre est décroissante
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

Tout les reste (u converge etc.) fait partie du théorème des suites adjacentes. Pour démontrer que des suites sont adjacentes, il suffit donc de montrer les 3 points précédents (et seulement eux). Et on peut ensuite appliquer le théorème

27) 4 premiers termes : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ (C 506a)

Ne pas oublier le reste : $o(x^3)$ ou $x^3\varepsilon(x)$
sinon l'égalité est totalement fausse.

28) Si A et B sont inversibles, alors $(A.B)^{-1} =$ $B^{-1}A^{-1}$ (C 1606)