1) La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$ (C 099b)

2) $\cos x < -\frac{1}{2} \iff \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ (C 162b)

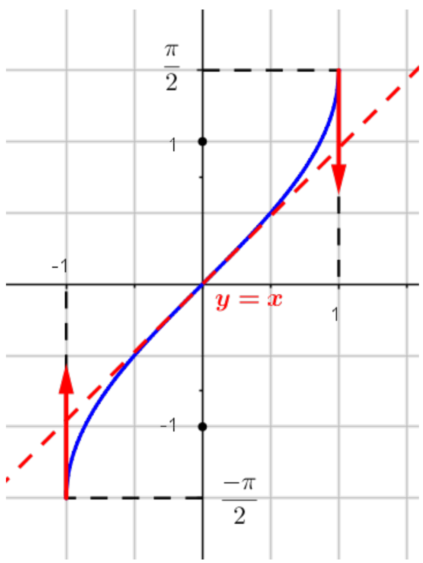
3) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \arg(z).\arg(z') =$ PFC (C 233b)

4) Pour $z \in \mathbb{C}$, $\arg(e^z) =$ $\text{Im}(z) \quad [2\pi]$ (C 253)

Pour $z = a + ib$, $e^z = e^a e^{ib}$
$\Rightarrow \arg(e^z) = \arg(e^{ib}) = b = \text{Im}(z) \quad [2\pi]$

5) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$ $(= \mathbb{R}_+^*)$ (C 402a)

6) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \arcsin x$ (C 450)



7) (u_n) géométrique de raison $q \notin \{0, 1\}$ (C 515a)

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \frac{u_p - u_{n+1}}{1 - q}$$

- Les deux formules sont à connaître et sont équivalentes puisque $u_p q^{n-p+1} = u_{n+1}$
- Ne pas oublier le premier terme u_p car la somme commence avec $k = p$ (et non $k = 0$)

8) Factoriser : $a^3 + b^3 =$ $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (C 555d)

9) $\min(x_1, \ \dots, \ x_n) \leq a$ (C 589b)

$\iff$ $x_1 \leq a$ **ou** $x_2 \leq a$ ou ... ou $x_n \leq a$

($\iff$ $\exists i \in [[1, n]], \ x_i \leq a$)

10) Formule de symétrie des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p} \quad \text{pour} \quad 0 \leq p \leq n$$ (C 630)

11) Soit $\mathcal{P}$ une propriété (C 712b)

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \left[\ \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y) \ \right] \Rightarrow x = y$$

signifie que : il existe au plus une valeur x de E vérifiant la propriété $\mathcal{P}$

12) f une bijection de E dans F Alors $f^{-1} \circ f =$ Id_E (C 757c)

13) Équivalent en 0 avec $\cos x$: $1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ (C 807b)

14) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 830f)

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \sim v_n$$

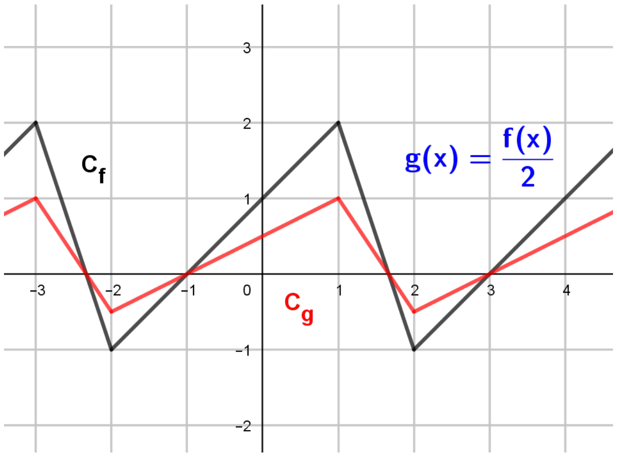
Par exemple $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ $v_n = \frac{1}{n^2}$
$\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$ mais $u_n \sim \frac{1}{n}$

15) Le domaine des valeurs de arcsin est $[-\pi/2, \ \pi/2]$ (C 902b)

16) Pour $a \in \mathbb{R}$, (C 919d)

$$a = \arccos \tfrac{4}{5} \iff \left(\cos a = \tfrac{4}{5} \quad \text{ET} \quad a \in [0,\ \pi] \right)$$

17) Tracer le graphe de g définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{2}$ (C 1005e)



18) Dérivabilité et dérivée de la réciproque <u>en $y \in J$</u> (C 1036c)

Soit f une bijection de I sur J

Si f est dérivable en $\underline{x = f^{-1}(y)}$ et $\underline{f'(x) \neq 0}$

Alors f^{-1} est dérivable en y et $\boxed{f^{-1}(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}}$

Bien donner le lien entre x et y sinon écrire $f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ n'a aucun sens

19) $F(x) = \displaystyle\int^x (5-6t)^{1/2}\ \mathrm{d}t$ et $(u^{3/2})' = \frac{3}{2}.u'.u^{3/2}$ (C 1073)

$$F(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{-6} \int^x \frac{3}{2}(-6).(5-6t)^{1/2}\ \mathrm{d}t = \frac{-1}{9}(5-6x)^{3/2}$$

Pour $5 - 6t \geq 0 \iff t \leq \frac{5}{6}$ donc sur $I = \left]-\infty, \frac{5}{6}\right]$

20) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et <u>paire</u> et $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\ \mathrm{d}t$ (C 1107)

g est-elle paire ? impaire ? Démontrez–le

Posons $u = -t \Rightarrow \mathrm{d}t = \ \mathrm{d}u$

$$g(-x) = \int_{-x}^{-2x} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_x^{2x} f(-u)(-\ \mathrm{d}u) \quad \text{avec } f \text{ paire}$$

$\Rightarrow \quad g(-x) = -\displaystyle\int_x^{2x} f(u)\ \mathrm{d}u = -g(x)$ Donc <u>g est paire</u>

21) Déterminer les solutions de l'équation (E) $4y' + x.y = 0$ (C 1131d)

$$(E) \iff y' + \frac{x}{4}.y = 0 \iff y' + a(x)y = 0$$

avec $a(x) = \dfrac{x}{4}$ de primitive $A(x) = \dfrac{x^2}{8}$

Les solution sont de la forme $y(x) = K^{-A(x)} = K\mathrm{e}^{-x^2/8}$

22) Soit l'équation $y'' + y = \mathrm{e}^{2x} \cos x$ (C 1142b)

Son équation caractéristique a pour racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$

Trouver une **solution particulière** y_p

$y'' + y = \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}] = \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{(2+\mathbf{i})x}]$ On cherche $\varphi(x) = C.\mathrm{e}^{(2+\mathbf{i})x}$

$\varphi'(x) = C.(2+\mathbf{i})\mathrm{e}^{(2+\mathbf{i})x}$, $\varphi''(x) = C.(2+\mathbf{i})^2\mathrm{e}^{(2+\mathbf{i})x} = C.(3+4\mathbf{i})\mathrm{e}^{(2+\mathbf{i})x}$

$$y'' + y = \mathrm{e}^{(2+\mathbf{i})x} \iff C[(3+4\mathbf{i})+1] = 1 \iff C = \frac{1}{4(1+\mathbf{i})} = \frac{1-\mathbf{i}}{8}$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = \mathrm{Re}\left[\frac{1-\mathbf{i}}{8}(\cos x + \mathbf{i}\sin x)\mathrm{e}^{2x}\right] = \frac{1}{8}(\cos + \sin x)\mathrm{e}^{2x}$$

23) Vrai ou Faux ?. . . **Vrai** (C 1218d)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante

et u la suite telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$

Alors la suite u est décroissante

En effet, $n < n+1 \Rightarrow f(n) \geq f(n+1) \Rightarrow u_n \geq u_{n+1}$

Attention :

ne pas confondre avec la suite recurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

24) Théorème de convergence des suites monotones (C 11232b)

Cas croissant :

Si la suite u est croissante et majorée par un réel M
Alors la suite u converge vers une limite ℓ
telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq M$

25) Soit $x \in \mathbb{R}$ Donner $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ et **démontrez-le !** (C 1253)

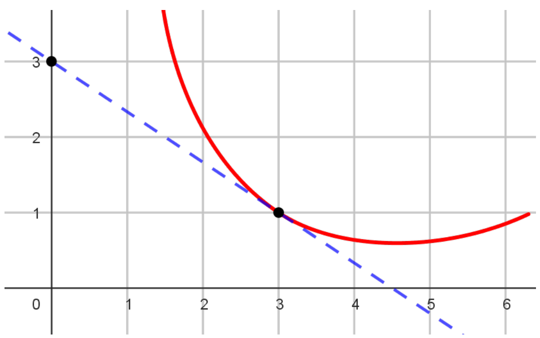
$$nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx \quad \Rightarrow \quad x - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x \quad \text{car } n > 0$$

Quand $n \to +\infty,\ 1/n \to 0$ donc par encadrement $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$

26) $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ (C 1289)

27) Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$ (E 1298e)
Si f admet pour DL à l'ordre 2 en x_0 : $f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + o(h)$
Alors f est continue et dérivable en x_0 et $a_0 = f(x_0)$ $a_1 = f'(x_0)$

28) $f(3+h) = 1 - \frac{2}{3}h + 2h^2 + o(h^2)$ (C 1308b)
Représenter C_f au voisinage de 3



29) $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n)}(\mathbb{K})$ est diagonale (C 1602c)
$\iff \forall (i,j) \in [[1,n]]^2, \quad i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$

30) Soit A une matrice telle que $A^2 = 3A$ (C 1630d)
Pour $n \geq 2$, calculer $(A+2I)^n$ en fonction de A et I

$A^2 = 3A \quad \Rightarrow \quad A^k = 3^{k-1}A$ pour $k \geq 1$

$$(A+2I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (2I)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (2I)^{n-k}$$

$$= 2^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} 2^{n-k} A$$

$$= 2^n I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k}\right) A$$

$$= 2^n I + \frac{1}{3}\left(-2^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k}\right) A$$

$$= 2^n I + \frac{1}{3}(-2^n + 5^n) A$$