1) $\tan(\pi/4) = \quad 1$ (C 204c)

2) $\tan x \geq -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ (C 176b)

3) $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \arg\big(-z\big) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$ (C 237a)

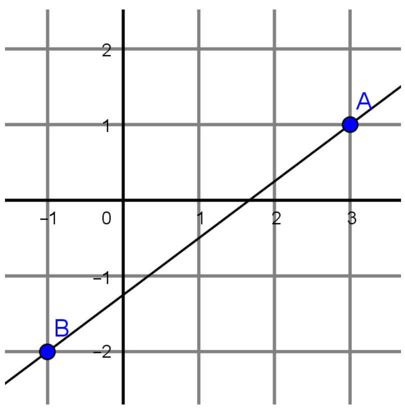
En effet, $\arg\big(-1.z\big) = \arg\big(z\big) + \arg\big(-1\big) = \arg\big(z\big) + \pi \quad [2\pi]$

4) Dans $\mathbb{C}$ : Soit $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ (C 321b)

$z^n = re^{i\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[n]{r}.\ \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}$
(ou avec $k \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ )

5) $(\sin x)' = \cos x$ sur $\mathbb{R}$ (C 411)

6) Déterminer l'équation cartésienne de la droite $(AB)$ (C 461b)




$y = ax + b$ coefficient directeur $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-1}{-1-3} = \dfrac{3}{4}$

$b = y_A - a.x_A = 1 - \dfrac{3}{4}3 = \dfrac{-5}{4}$ $\qquad \boxed{y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{4}}$

7) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \exp(-2k) = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{-2})^k = \frac{1-(\mathrm{e}^{-2})^n}{1-\mathrm{e}^{-2}}$ car $\mathrm{e}^{-2} \neq 1$ (C 517c)

8) Vrai ou Faux ?. . .**Vrai** (C 580d)

Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad x \geq -2$

En effet, $x^2 \leq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 2$
et $-2 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad -12 \leq x$
La réciproque bien sûr est fausse

9) Donner un encadrement décimal de $x \in \mathbb{R}$ à $10^{-n}$ près : (C 605b)

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Par exemple pour $x = \pi$ et $n = 2$ $\qquad 10^2\pi = 314, 15\ldots$

$\Rightarrow \lfloor 10^n x \rfloor = 314 \Rightarrow \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = 3,14 \Rightarrow 3,14 \leq \pi < 3,15$

10) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k = -1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.1^{n-k} = -1 + (1+x)^n$ (C 640f)

11) Vrai ou Faux ?. . .**Vrai** (C 725b)

La proposition suivante dépend de $A$

$\forall x \in E,\ \exists \alpha \in F,\ \forall y \in E,\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < A$

car $A$ n'est pas quantifié

12) Montrer que $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$ (C 790b)

$f(x) = \ln(1+x) - x$. $f$ continue et dérivable sur $]-1,\ +\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 0$ car $x + 1 > 0$

$f$ croissante sur $]-1, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$
donc a pour maximum $f(0) = 0$

Donc $\forall x > -1,\ f(x) \leq 0$ donc $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$

13) Équivalent en 0 avec exp : $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$ (C 803b)

14) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (C 825b)

$$f \underset{a}{\sim} h \quad \text{et} \quad g \underset{a}{\sim} h \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a}(f-g) = 0$$

$\frac{f(x)}{h(x)} \to 1$ et $\frac{g(x)}{h(x)} \to 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)-g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f - g = o(h)$

Mais cela n'implique pas que $f - g \to 0$

Par exemple : $f(x) = x^2 + 2x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $h(x) = x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$

Mais $(f-g)(x) = x \not\to 0$

15) Le domaine de définition de arcsin est $[-1,\ 1]$ (C 902a)

16) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (C 919c)

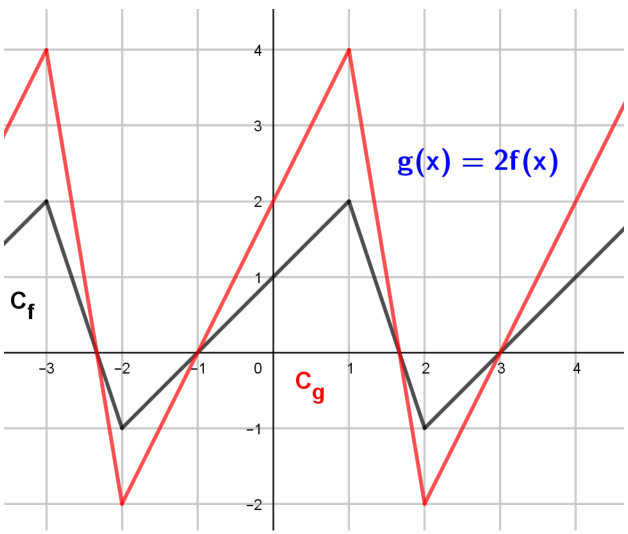
$$\cos a = \tfrac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad a = \arccos \tfrac{3}{5}$$

Il faut aussi avoir $a \in [0, \pi]$ :

$$\left(\cos a = \tfrac{3}{5} \quad \text{ET} \quad a \in [0,\pi]\right) \quad \Rightarrow \quad a = \arccos \tfrac{3}{5}$$

En effet, il existe **une infinité** d'angles tels que $\cos a = \frac{3}{5}$
mais **un seul** angle qui est égal à $\arccos \frac{3}{5}$

17) Tracer le graphe de $g$ définie par $g(x) = 2f(x)$ (C 1005d)




18) Soit $f$ une bijection de $I$ sur $J$ (C 1036b)
Dérivabilité et dérivée de la réciproque en $y \in J$

Si $\boxed{f \text{ est dérivable en } \quad x = f^{-1}(y) \quad \text{et} \quad f'(x) \neq 0}$

Alors $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable en } y}$ et $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Bien donner le lien entre $x$ et $y$.
Sinon écrire $f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ n'a aucun sens

19) $\displaystyle\int^x \frac{3\ \mathrm{d}t}{\sqrt{2-4t}}$ Primitive du type $\sqrt{u}$ avec $\left[\sqrt{u}\right]' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ (C 1072)

$$\int^x \frac{3\ \mathrm{d}t}{\sqrt{2-4t}} = \int^x 3\frac{2}{-4} \cdot \frac{-4\ \mathrm{d}t}{2\sqrt{2-4t}} = \frac{-3}{2}\sqrt{2-4x} \qquad \text{sur} \quad ]-\infty; 2[$$

20) Si $f$ est $T$-périodique sur $\mathbb{R}$ (C 1109b)

Alors $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt \quad \forall a \in \mathbb{R}$

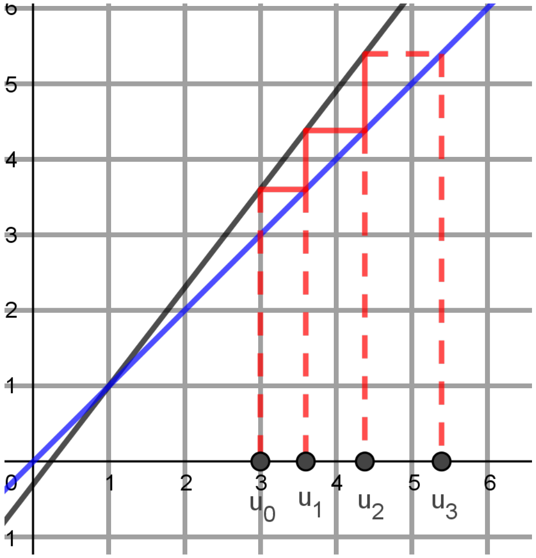
21) Soit l'équation $y'' + by' + cy = \mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $a \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ (C 1136a)

Si $\lambda$ est racine double de l'équation $\underline{x^2 + bx + c = 0}$

alors on cherche une SP de la forme $\underline{y_1(x) = Kx^2\mathrm{e}^{\lambda x} \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{C}}$

22) $u_0 = 3,\ \forall n \in,\ u_{n+1} = f(u_n)$ (C 1215b)

Construire les termes $u_0,\ u_1,\ u_2$ de la suite.




23) Soit $u$ une suite à valeur dans $I$ telle que (C 1219)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec } f \text{ croissante sur } I \text{ et} \quad u_1 \leq u_0$$

Démontrer que la suite $u$ est décroissante

On montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

- Initialisation : c'est vrai pour $n = 0$ car $u_1 \leq u_0$
- Hérédité : supposons la relation vraie à un rang $n$ donné
  On a $u_{n+1} \leq u_n$
  $\Rightarrow$ $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ car $f$ est croissante sur $I$
  $\Rightarrow$ $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ La relation est vraie au rang $n+1$
- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}$

la suite $u$ est donc décroissante

24) Convergence des suites monotones : **Cas décroissant** (C 1232a)

Si la suite $u$ est décroissante et minorée par un réel $m$

Alors la suite $u$ converge vers une limite $\ell$

telle que $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geq \ell \geq m$

25) La proposition suivante est **Fausse** (C 1246i)

Si $(\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < 1\ )$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0$

Contre-exemple : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}$

26) $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ (C 1289)

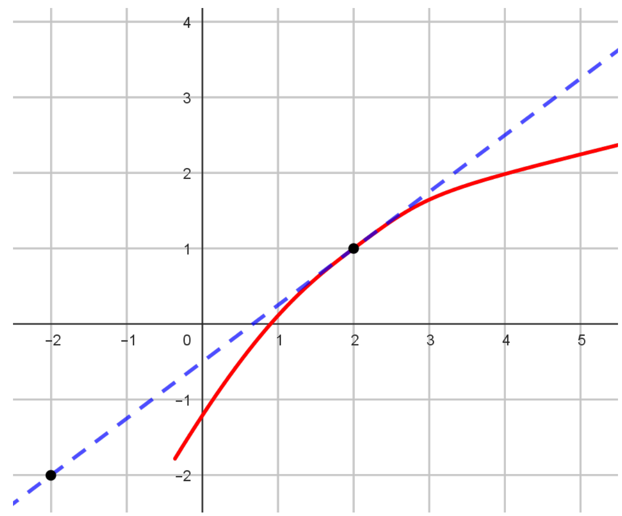
27) Soit $f$ une fonction définie sur $I$ et $a \in I$ (C 1298e)

Si $f$ admet pour DL à l'ordre 2 en $x_0$ : $f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + o(h)$

Alors $f$ est continue et dérivable en $x_0$ et $a_0 = f(x_0)$ $a_1 = f'(x_0)$

28) $f(2+x) = 1 + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$ (C 1308a)

Représenter $C_f$ au voisinage de 2



$f(2+x) \leq 1 + 3x$
Donc $C_f$ est située **au-dessous** de la tangente en 2 (qui a pour pente de pente $3/4$)

29) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n)}(\mathbb{K})$, $\quad A$ est triangulaire supérieure (C 1602a)

$\iff \quad \forall (i,j) \in [[1,n]]^2,\ i > j \quad \Rightarrow \quad a_{i,j} = 0$

30) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 1631b)

$A$ et $B$ deux matrices carrées. Alors $\quad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

| Ce n'est vrai que si les deux matrices commutent |
|---|