1) $\sin(3\pi/2) = -1$ (C 100d)

2) Exprimer avec le conjugué $\quad \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ (C 210a)

3) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad e^{ix} = 1 \iff x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (C 249a)

4) Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i},\ \vec{j})$ (C 351a)
Interprétation géométrique : $\quad \arg(z_u) = (\vec{i},\ \vec{u}) \quad [2\pi]$

5) Tangente particulière à la courbe (C) d'équation $\quad y = \ln x$: (C 441b)
La droite d'équation $\quad y = x - 1 \quad$ est tangente à C au point $(1, 0)$

6) $$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})$$
$$= (a_{n+1} - a_1) + (a_n - a_0) \quad \text{par télescopage}$$ (C 505c)

7) Suite récurrente linéaire ordre 2 : $\quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ (C 545a)
Cas $\Delta > 0$ avec $\Delta = a^2 + 4b$
Alors les solutions réelles sont de la forme : $\quad u_n = \lambda . {r_1}^n + \mu . {r_2}^n$
avec $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad$ et $\quad r_1,\ r_2 \quad$ racines de $\quad$ l'équation $\quad r^2 = a.r + b$

8) Définition : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \max(x,\ -x)$ (C 560a)

9) Définition : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (C 600c)
$$\lfloor x \rfloor = y \iff \begin{cases} x = y + \alpha & \text{avec} \\ y \in \mathbb{Z},\ \alpha \in [0, 1[\end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{Z} & \text{et} \\ y \leq x < y + 1 \end{cases}$$

Ne pas oublier que $\quad y \in \mathbb{Z}$.
D'autre part, on ne peut pas utiliser la partie entière pour définir la partie entière. Cela n'aurait pas de sens.

10) $\dfrac{15!}{6!8!} = \dfrac{15 \times 14!}{6!8!} = 15 \times \dbinom{14}{6}$ (C 641b)

11) $(\forall i \in I,\ x \in A_i) \quad \iff \quad x \in \bigcap_{i \in I}^{n} A_i$ (C 740d)

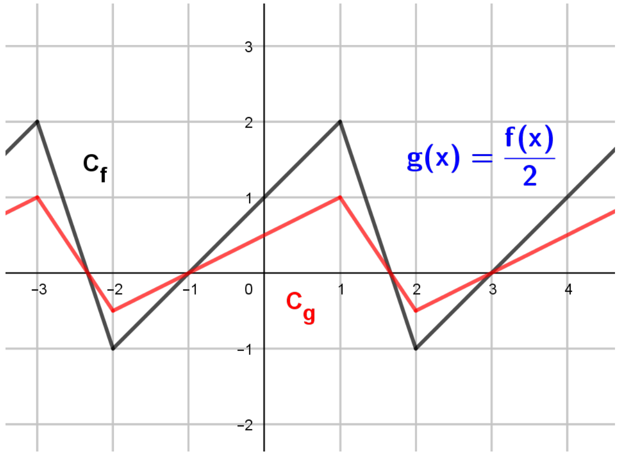
12) Équivalent en 0 de la puissance : $(\quad)^a \quad$ (avec $a \neq 0$) (C 804b)
$$(1+x)^a - 1 \underset{x \to 0}{\sim} ax$$

13) $\left(f \underset{a}{\sim} h \quad \text{et} \quad g \underset{a}{\sim} h \right) \quad \Rightarrow \quad (f - g) = o(h) \quad$ en a (C 825f)

14) Démontrer que $\quad \ln(1+x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln x$ (C 843a)
$\ln(1+x) = \ln(x(1 + \frac{1}{x})) = \ln x + \ln(1 + \frac{1}{x})$
Quand $x \to +\infty,\ \ln(1 + \frac{1}{x}) \to 0 \quad \ln x \to +\infty$
Donc $\quad \ln(1 + \frac{1}{x}) = o(\ln x) \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) \sim \ln x$

15) $\arcsin(\cos(5\pi/8)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8}))$ (C 915e)
$= \arcsin(\sin(\frac{-\pi}{8})) = \frac{-\pi}{8} \quad$ car $\quad \frac{-\pi}{8} \in [-\pi/2,\ \pi/2]$

16) Tracer le graphe de g définie par $\quad g(x) = \dfrac{f(x)}{2}$ (C 1005e)



17) <u>Dérivabilité et dérivée de la réciproque en $y \in J$</u> (C 1036a)

Soit f une bijection de I sur J
Si f est dérivable en $x = f^{-1}(y)$ et $f'(x) \neq 0$

Alors f^{-1} est dérivable en y et $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$

Évitez donc de justifier que f est bijective : c'est donné par l'énoncé. On ne va passer non plus sa vie entière à enfoncer des portes déjà ouvertes.

18) $F(x) = \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(-2t+3)^4} = \int^x (-2t+3)^{-4}\ \mathrm{d}t$ (C 1071)

Primitive du type u^{-3} avec $[u^{-3}]' = -3u'.u^{-4}$

$F(x) = \displaystyle\int^x \frac{1}{6}(-3)(-2)(-2t+3)^{-4}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{6}(-2x+3)^{-3} = \frac{1}{6(-2x+3)^3}$

sur $]-\infty; 3/2[$ ou $]3/2; +\infty[$

19) Si f est impaire, Alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$ (C 1106b)

20) $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\ \mathrm{d}t = \int_x^{x^2} g(t)\ \mathrm{d}t = G(x^2) - G(x)$ (C 1120b)

$\Rightarrow \quad f'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = 2x\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} - \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = \dfrac{2\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^x}{x}$

avec $g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ et G primitive de g

21) Soit l'équation $y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^{2x} \sin x$ (C 1142a)

Son équation caractéristique a pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$
Pour trouver une **solution particulière** y_p, on trouve d'abord
la fonction **complexe** φ de la forme $\boxed{\varphi(x) = A\mathrm{e}^{(2+\mathbf{i})x} \text{ avec } A \in \mathbb{C}}$

solution de l'équation $\boxed{y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^{(2+\mathbf{i})x}}$

Et on a ensuite $\boxed{y_p(x) = \mathrm{Im}\big(\varphi(x)\big)}$

22) Vrai ou Faux ?...**Vrai** (C 1218b)

Soit u une suite à valeur dans I telle que
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec f est croissante sur I
Alors la suite u est monotone

23) (convergence) Soit u une suite décroissante (C 1231b)

<u>Si</u> la suite u est minorée
<u>Alors</u> la suite u converge
<u>sinon</u> la suite u tend vers $-\infty$

24) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + o(x^6)$ (C 1285a)

25) Vrai ou Faux ?...**Vrai** (C 1299b)

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. Alors

f admet un DL à l'ordre 1 en $a \iff f$ est dérivable en a

26) <u>Définition</u> : un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ (C 1500c)

est un intervalle $]a-r, a+r[$ avec $r > 0$

27) **Théorème de la limite monotone** (C 1515a)

Soit f <u>croissante</u> sur $\big]a,\ b\big[$ avec $a < b$, $(a,\ b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

Si f est minorée par m

alors f admet une limite finie en a

tel que $\forall x \in]a,\ b[, \quad m \leq \lim\limits_{a} f \leq f(x)$

sinon $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$

28) Vrai ou Faux ? ... **Faux** (C 1521c)

Si l'application $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle ouvert I
alors $f(I)$ est aussi un intervalle ouvert.

Par ex : la fonction $f : x \mapsto \lvert x \rvert$ $f(]-1,1[) = [0,1[$ n'est pas ouvert

29) Soient A et B des matrices inversibles (E 1606b)

Démontrer que $A.B$ est inversible et donner son inverse

$$(AB).(B^{-1}A^{-1}) = A.(BB^{-1})A = A.I.A^{-1} = A.A^{-1} = I$$

Les matrices sont carrées (sinon elles ne seraient pas inversibles)
et $\big(AB\big)\big(B^{-1}A^{-1}\big) = I$
Donc AB est inversible et $\big(AB\big)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

30) Soit A une matrice telle que $A^3 = 0$ (C 1630c)

$$(3A+2I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3A)^k (2I)^{n-k}$$

Binôme de Newton car $3A$ et $2I$ commutent

$$= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 3^k A^k 2^{n-k} \quad \text{car} \quad A^k = 0 \quad \text{pour } k \geq 3$$

$$= \binom{n}{0} 2^n I + \binom{n}{1} 3.2^{n-1} A + \binom{n}{2} 3^2.2^{n-2} A^2$$

$$= 2^n I + n.3.2^{n-1} A + \frac{n(n-1)}{2}.3^2.2^{n-2} A^2$$

$$= 2^n \Big(I + \frac{3}{2} n.A + \frac{9}{8} n(n-1).A^2 \Big)$$