Exercice 1 Déterminer les limites suivantes <u>en utilisant les définitions</u>

a) $f(x) = x^2 + x + 1$. Limite en $x_0 = 2$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}$. Limite en $x_0 = 1$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}$. Limite en $x_0 = 2/3$

Exercice 2 $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t+t^5}}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$

a) Montrer que f est bien définie sur $]0,\ +\infty[$. Étudier sa monotonie.

b) Montrer que pour $0 < x \leq 1,\ f(x) \leq \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt \leq 2$
Que peut-on en déduire sur f en 0 ?

c) Montrer que pour $1 \leq x,\ f(x) \geq \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t^2}dt$
Que peut-on en déduire sur f en $+\infty$?

Exercice 3 (Classique)
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. M.q. f admet un point fixe.

Exercice 4

1) Soit f continue sur un intervalle I (Hyperclassique)
Montrer que si f ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I

2) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} |f| = +\infty$
   a) Donner un exemple d'une telle fonction f telle que f n'admet pas de limite (finie ou non) en $+\infty$. Démontrer-le !
   b) On suppose maintenant que f est continue sur $[0,+\infty[$
   Montrer alors que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ (On pourra utiliser le résultat de la question 1.)

Exercice 5 (Classique)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

a) Calculer $f(0)$ et établir que f est une fonction impaire.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x)$. Etendre cette relation à $n \in \mathbb{Z}$.

c) On pose $a = f(1)$. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{Q},\ f(u) = au$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$

e) En déduire, en exploitant la continuité de f, que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.

Exercice 6 Prolongement par continuité et dérivabilité

a) Pour $x \in 0$, on pose $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$
Montrer que f n'admet aucune limite quand $x \to 0$

b) Pour $x \neq 0,\ g(x) = x\sin(1/x)$
Montrer que g est prolongeable par continuité. Cette nouvelle fonction est-elle dérivable en 0 ?

c) Pour $x \neq 0,\ h(x) = x^2\sin(1/x)$ et $h(0) = 0$
Montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. Est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7 Donner des exemples (quand ils existent) de fonctions vérifiant les conditions suivantes

a) $f : [0,\ +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, ni majorée, ni minorée

b) $f : [0,\ +\infty[\to \mathbb{R}$ f est bornée, monotone et n'atteint pas sa borne supérieure

c) $f : [0,\ +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, bornée et n'atteint ni sa borne supérieure, ni sa borne inférieure

d) $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ n'est pas continue et $f([0,1])$ est un intervalle

e) $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ est continue et $f([0,1])$ n'est pas un intervalle

f) $f : [0,\ 1] \to I$, I intervalle, f bijective et non continue

g) $f : [0,\ 1] \to I$, f monotone, I n'est pas un intervalle

h) $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$, f monotone, f n'est pas bornée

i) $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$, f bornée et f n'atteint pas ses bornes

j) $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$, f ni majorée, ni minorée

k) $f :]0,\ 1] \to \mathbb{R}$, f monotone et non bornée

l) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, f continue, positive, $f(0) = 0$ et
$\forall \varepsilon > 0$, f n'est pas monotone sur $[0,\varepsilon]$

m) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est continue nulle part sur $\mathbb{R}$

n) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ sauf en 0