 FE 12 c (miscellanées)

Exercice 3 (Intégrales de Wallis) (Classique)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$

a) Calculer $I_0,\ I_1,\ I_2$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos 0 = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2} \, dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

b) Montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$ et $I_n > 0$

Changement de variable : $u = \frac{\pi}{2} - t \quad \Rightarrow \quad du = -\,dt$

Bornes : $\left\{\begin{array}{ll} t = \pi/2 & u = 0 \\ t = 0 & u = \pi/2 \end{array}\right.$ D'où :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \int_{\pi/2}^{0} \sin^n\left(\tfrac{\pi}{2} - u\right)(-\,du)$$

$$= -\int_{\pi/2}^{0} \cos^n(u) \, du = \int_0^{\pi/2} \cos^n(u) \, du = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$$

Montrons que $I_n > 0$

$< < <$ La seule difficulté est de justifier que I_n est <u>strictement</u> positive $> > >$

Sur $[0,\pi/2]$, $\sin^n(t) \geq 0$ Et $0 < \pi/2$ (BBS) $\Rightarrow$ $I_n \geq 0$

Par l'absurde, supposons $I_n = 0$

Or $\sin^n(t) \geq 0 \Rightarrow \sin^n(t) = 0$ sur $[0,\pi/2]$ Ce qui est faux
Donc $I_n > 0$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$

Faisons une intégration par parties :

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t . \sin t \, dt$$

$$\left\{\begin{array}{ll} u(t) = \sin^{n+1} t & u'(t) = (n+1)\sin^n t(\cos t) \\ v'(t) = \sin t & v(t) = -\cos t \end{array}\right.$$

avec $u, v C^1$ sur $[0,\pi/2]$

$$I_{n+2} = \left[(\sin^{n+1} t)(-\cos t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n t(\cos t)(-\cos t) \, dt$$

$$= \left[(\sin^{n+1} \tfrac{\pi}{2})(-\cos \tfrac{\pi}{2}) - (\sin^{n+1} 0)(-\cos 0)\right] + (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin^n t)(\cos^2 t) \, dt$$

$$= 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin^n t)(1 - \sin^2 t) \, dt$$

$$= (n+1)\left(\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t \, dt\right)$$

$$I_{n+2} = (n+1)\left(I_n - I_{n+2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \quad \Rightarrow \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \quad \text{CQFD}$$

d) Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$.

On applique la formule précédente :

- 1er cas : $n = 2p$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \qquad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{1}{2}\frac{3}{4} I_0 \qquad I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6} I_0$$

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 5.3.1}{2p(2p-2)\ldots 6.4.2} I_0$$

$$= \frac{2p(2p-1)(2p-2)\ldots 4.3.2.1}{\left(2p(2p-2)\ldots 6.4.2\right)^2} I_0$$

$$= \frac{(2p)!}{\left(2^p(p(p-1)\ldots 3.2.1\right)^2} I_0$$

$$= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Vérif : pour $p=0$: $I_0=\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{(0)!}{2^0(0!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

Pour $p=1$: $I_2=\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{2!}{2^2(1!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2}{2^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

- 2ème cas : $n=2p+1$

$$I_3=\frac{2}{3}I_1=\frac{2}{3}\qquad I_5=\frac{4}{5}I_3=\frac{4}{5}\frac{2}{3}\qquad I_7=\frac{6}{7}I_5=\frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}$$

$$I_{2p+1}=\frac{2p}{2p+1}I_{2p-1}=\frac{(2p)(2p-2)\dots 6.4.2}{(2p+1)(2p-1)\dots 7.5.3}$$

$$=\frac{\big(2p(2p-2)\dots 6.4.2\big)^2}{(2p+1)2p(2p-1)\dots 4.3.2.1}$$

$$=\frac{\big(2^p(p(p-1)\dots 3.2.1\big)^2}{(2p+1)!}=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Vérif : pour $p=0$: $I_1=1$ et $\dfrac{2^0(0!)^2}{(1)!}=1$

pour $p=1$: $I_3=\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{2^2(1!)^2}{3!}=\dfrac{2^2}{6}=\dfrac{2}{3}$

pour $p=2$: $I_5=\dfrac{8}{15}$ et $\dfrac{2^4(2!)^2}{5!}=\dfrac{2^4 2^2}{5.4.3.2}=\dfrac{2^6}{2^3.5.3}=I_5$

Ces formules pourraient, si besoin, se montrer par récurrence.

e) Établir que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(n+1)I_{n+1}I_n=\frac{\pi}{2}\quad\text{et}\quad I_{n+2}\le I_{n+1}\le I_n$$

§ Montrons que $(n+1)I_{n+1}I_n=\dfrac{\pi}{2}$

Le plus simple est de le montrer par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$

- Initialisation : pour $n=0$: $1.I_2I_1=\dfrac{\pi}{2}\times 1=\dfrac{\pi}{2}$ Vrai en 0.
- Hérédité : supposons la relation vraie à un rang $n\ge 0$ donné.

  On a : $(n+1)I_{n+1}I_n=\dfrac{\pi}{2}$ (HR)

  $$(n+2)I_{n+2}I_{n+1}=(n+2)(\frac{n+1}{n+2}I_n)\ I_{n+1}\quad\text{d'après c)}$$

  $$=(n+1)I_nI_{n+1}=\frac{\pi}{2}\quad\text{d'après (HR)}$$

  La relation est vraie au rang $n+1$
- Conclusion : la relation est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$

§ Montrons que $I_{n+2}\le I_{n+1}\le I_n$

(Il s'agit ici de montrer que (I_n) est décroissante)

Pour $t\in[0,\ \pi/2]$, $0\le\sin t\le 1$

$\Rightarrow\quad \sin^{n+1}t\le\sin^n t$

$\Rightarrow\quad \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{n+1}t\ \ dt\le\int_0^{\pi/2}\sin^n t\ \ dt$ car $0\le\pi/2$ (BBS)

$\Rightarrow\quad I_{n+1}\le I_n$

La suite (I_n) est décroissante D'où $I_{n+2}\le I_{n+1}\le I_n$

f) Déterminer un équivalent de I_n

On a $I_{n+2}\le I_{n+1}\le I_n$ avec $I_{n+1}>0$

D'où $I_{n+2}I_{n+1}\le I_{n+1}^2\le I_nI_{n+1}$

Or $(n+1)I_{n+1}I_n=\dfrac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad(n+2)I_{n+2}I_{n+1}=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\quad I_{n+1}I_n=\dfrac{\pi}{2(n+1)}$ et $I_{n+2}I_{n+1}=\dfrac{\pi}{2(n+2)}$

D'où $I_{n+2}I_{n+1}\le(I_{n+1})^2\le I_nI_{n+1}$

$\Rightarrow\quad \dfrac{\pi}{2(n+2)}\le(I_{n+1})^2\le\dfrac{\pi}{2(n+1)}$

$\Rightarrow\quad \dfrac{n\pi}{2(n+2)}\le n(I_{n+1})^2\le\dfrac{n\pi}{2(n+1)}$

Or $\dfrac{n\pi}{2(n+2)}\sim\dfrac{n\pi}{2n}=\dfrac{\pi}{2}$ De même : $\dfrac{n\pi}{2(n+1)}\sim\dfrac{\pi}{2}$ en $+\infty$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n\pi}{2(n+2)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\pi}{2(n+1)}=\frac{\pi}{2}$

D'où, par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n(I_{n+1})^2=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\quad n(I_{n+1})^2\sim\dfrac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad(I_{n+1})^2\sim\dfrac{\pi}{2n}$

$\Rightarrow\quad (I_n)^2\sim\dfrac{\pi}{2(n-1)}\sim\dfrac{\pi}{2n}$ (en remplacant n par $n-1$

$\Rightarrow\quad |I_n|\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}\quad\Rightarrow\quad I_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ car $I_n\ge 0$