 FE 12 d (Pbm)

Exercice 1

Une équation différentielle
On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \ : \ f''(x) + f(-x) = 2\cos(x)$$

On propose deux méthodes pour y arriver. Le résultat préliminaire servira uniquement dans la première méthode.

1. *Première méthode :*

a) Démontrer que si une fonction paire est deux fois dérivable alors sa dérivée seconde est paire.
Trouver et démontrer un résultat analogue pour une fonction impaire.

Soit f une fonction paire.
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(-x) = 0$
En dérivant :

$$f'(x) - (-1)f'(-x) = 0$$

puis $\quad f''(x) - (-1)(-1)f''(-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) - f''(-x) = 0$

f'' est donc paire

Soit f une fonction impaire. En dérivant deux fois
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(-x) = 0$

$\Rightarrow \quad f'(x) - f'(-x) = 0$

$\Rightarrow \quad f''(x) + f''(-x) = 0$

f'' est donc impaire

b) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, f_p et f_i sont respectivement solutions d'une équation différentielle linéaire du second degré, que l'on explicitera pour chacune d'elles.

Soit $\quad f = f_p + f_i$

f est solution de (E)

$\iff \quad f''(x) + f(-x) = 2\cos x$

$\iff \quad (f_p + f_i)''(x) + (f_p + f_i)(-x) = 2\cos x$

$\iff \quad f_p''(x) + f_i''(x) + f_p(-x) + f_i(-x) = 2\cos x$

$\iff \quad f_p''(x) + f_i''(x) + f_p(x) - f_i(x) = 2\cos x$

$\iff \quad (f_p'' + f_p)(x) + (f_i'' - f_i)(x) = 2\cos x$

$\iff \quad (g_p)(x) + (g_i)(x) = 2\cos x$

En posant $\quad g_p = f_p'' + f_p \quad$ et $\quad g_i = f_i'' - f_i$

D'après la question précédente, g_p est paire et g_i est impaire
D'après le préliminaire, la décomposition paire/impaire de $x \mapsto 2\cos x$ est unique
On a donc $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_p(x) = 2\cos x \quad$ et $\quad g_i(x) = 0$

$\iff \quad (f_p'' + f_p)(x) = 2\cos x \quad$ et $\quad (f_i'' - f_i)(x) = 0$

f_p est solution de l'équation $y''+y = 2\cos x$ et f_i solution de $y''-y = 0$

c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - y = 0$.
En déduire la forme de f_i.

Équation linéaire du second ordre à coefficients constants d'équation caractéristique $\quad r^2 - 1 = 0$

Racines $\quad -1, \ +1$

Les solutions sont de la forme $\quad y(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x}$

Or f_i est impaire, donc on doit avoir $f_i(-x) + f_i(x) = 0$

$\iff \quad (a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x}) + (a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^x) = 0$

$\iff \quad (a+b)\mathrm{e}^x + (b+a)\mathrm{e}^{-x}) = 0$

$\iff \quad (a+b)(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = 0$

$\iff \quad a + b = 0$

Donc $\quad f_i(x) = a\mathrm{e}^x - a\mathrm{e}^{-x} = a(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$

d) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $\quad y'' + y = 2\cos(x)$.
En déduire la forme de f_p.

- Équation linéaire du second ordre à coefficients constants d'équation caractéristique : $\quad r^2 + 1 = 0 \quad$ Racines : $\quad -1, \ +1$

 FE 12 d (Pbm)

Les solutions réelles de l'EHA $y'' + y = 0$ sont de la forme
$y(x) = a\cos x + b\sin x$

- On cherche une solution particulière (SP) de
$y'' + y = 2\cos(x) = 2\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x})$
de la forme $\varphi(x) = Ax\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}$ (car $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathbf{i}x}$ déjà solution de l'EHA)

$\varphi'(x) = A(1+\mathbf{i}x)\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}$ $\varphi''(x) = A(2\mathbf{i} - x)\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}$

Donc

$\varphi'' + \varphi = 2\cos(x) = 2\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}) \iff A2\mathbf{i}\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} = 2\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}$

$\iff A2\mathbf{i} = 2 \iff A = 1/\mathbf{i} = -i$ Donc une solution particulière est

$y_0(x) = \mathrm{Re}[-\mathbf{i}x\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}] = x\sin x$

- Solution générale : les solution générales sont de la forme

$y(x) = a\cos x + b\sin x + x\sin x, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

- forme de f_p

f_p doit être paire, donc $f_p(x) = f_p(-x)$

$\iff a\cos x + b\sin x + x\sin x = a\cos(-x) + b\sin(-x) + (-x)\sin(-x)$

$\iff a\cos x + b\sin x + x\sin x = a\cos(x) - b\sin(x) + x\sin x$

$\iff b\sin x = -b\sin(x)$

$\iff b = 0$

Donc $f_p(x) = a\cos x + x\sin x$

- Remarque : on peut aussi rédiger ainsi, en utilisant encore l'unicité de la décomposition paire/impaire :

$f_p(x) = [a\cos x + x\sin x] + [b\sin x] = f_{p,1}(x) + f_{p,2}(x)$

avec $f_{p,1}$ paire et $f_{p,2}$ impaire
Or f_p doit être paire, et donc par unicité de la décomposition paire/impaire : $f_{p,2} = 0$

$\Rightarrow f_p(x) = a\cos x + x\sin x$

e) $\boxed{\text{Déterminer l'ensemble des solutions de } (E).}$

D'après la question b), on doit avoir $f = f_p + f_i$

C'est-à-dire

$f(x) = f_p(x) + f_i(x) = a_p\cos x + x\sin x + a_i(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$

avec $(a_p,\ a_i) \in \mathbb{R}^2$

2. $\boxed{\textit{Deuxième méthode :} \text{ On se donne une solution } f \text{ de } (E).}$

a) Montrer que f est solution de l'équation linéaire du quatrième degré :
$y^{(4)} - y = -4\cos(x),$
où l'on rappelle que $y^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de y.

f est solution de (E), donc

$f''(x) + f(-x) = 2\cos(x)$ **(1)**

Dérivons deux fois :

$f^{(3)}(x) - f'(-x) = -2\sin(x)$

$f^{(4)}(x) + f''(-x) = -2\cos(x)$ **(2)**

On remplace x par $-x$ dans l'équation **(1)**

$f''(-x) + f(x) = 2\cos(-x)$ **(3)**

On soustrait :

(2) − **(3)** $f^{(4)}(x) - f(x) = -4\cos x$

f est donc bien solution de l'équation : $y^{(4)} - y = -4\cos x$

b) On pose $g = f'' - f$. En déduire que g est solution d'une équation différentielle linéaire du second degré, que l'on explicitera. On note (E') cette équation.

$g = f'' - f \Rightarrow g' = f^{(3)} - f' \Rightarrow g'' = f^{(4)} - f''$

$\Rightarrow g'' + g = f^{(4)} - f$

Donc $g'' + g = -4\cos x$ **(E')**

c) $\boxed{\text{Résoudre } (E').}$

On a une équation linéaire du second ordre à coefficients constants
On a déjà résolu l'équation : $y'' + y = 2\cos(x)$ qui avait pour

 FE 12 d (Pbm)

solution générale $\qquad y(x) = a\cos x + b\sin x + x\sin x, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

Donc (E') a pour solution générale

$$g(x) = a\cos x + b\sin x - 2x\sin x, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

d) Donner l'ensemble des solutions de (E) et vérifier qu'il coïncide bien avec celui trouvé grâce à la première méthode.

$f'' - f = g \quad \Rightarrow \quad f'' - f = a\cos x + b\sin x - 2x\sin x$

- On a trouvé la solution de l'EHA : $y(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$

  Il reste à trouver une solution particulière :
- Par principe de superposition, on cherche d'abord une solution de $f'' - f = a\cos x + b\sin x$ de la forme $y_1(x) = a_1\cos x + b_1\sin x$

  $y_1''(x) = -a_1\cos x - b_1\sin x$

  $$y_1''(x) - y_1(x) = a\cos x + b\sin x$$

  $\iff \quad -2a_1\cos x - 2b_1\sin x = a\cos x + b\sin x$

  $\iff \quad a_1 = \dfrac{-a}{2} \quad b_1 = \dfrac{-b}{2}$

  $\iff \quad y_1(x) = \dfrac{-a}{2}\cos x + \dfrac{-b}{2}\sin x$
- De même on cherche une solution de $f'' - f = -2x\sin x = \mathrm{Im}[-2x e^{\mathbf{i}x}]$ de la forme $z_2(x) = (Ax+B)e^{\mathbf{i}x}$

  $z_2'(x) = A(e^{\mathbf{i}x}) + \mathbf{i}(Ax+B).e^{\mathbf{i}x}$

  $z_2'(x) = \mathbf{i}A(e^{\mathbf{i}x} + \mathbf{i}A(e^{\mathbf{i}x}) - (Ax+B)e^{\mathbf{i}x})$

  D'où

  $$f'' - f = -2xe^{\mathbf{i}x}$$

  $\iff \quad (2\mathbf{i}A - (Ax+B))e^{\mathbf{i}x}) - (Ax+B)e^{\mathbf{i}x} = -2xe^{\mathbf{i}x}$

  $\iff \quad (2\mathbf{i}A - (Ax+B)) - (Ax+B) = -2x$

  $\iff \quad -2A.x + (2\mathbf{i}A - 2B) = -2x$

  $\iff \quad A = 1 \quad B = \mathbf{i}A = \mathbf{i}$

  $\Rightarrow \quad z_2(x) = (x+\mathbf{i})e^{\mathbf{i}x} = xe^{\mathbf{i}x} + \mathbf{i}e^{\mathbf{i}x}$

  $\Rightarrow \quad y_2(x) = \mathrm{Im}[z_2(x)] = x\sin x + \cos x$
- Finalement

  $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} + \dfrac{-a}{2}\cos x + \dfrac{-b}{2}\sin x + x\sin x + \cos x$

  $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma\cos x + \delta\sin x + x\sin x$
- Il reste maintenant à faire la réciproque, c'est-à-dire vérifier si ces fonctions sont bien solution de (E)

  $$(E) \ : \ f''(x) + f(-x) = 2\cos(x)$$

  $f'(x) = \alpha e^x - \beta e^{-x} - \gamma\sin x + \delta\cos x + \sin x + x\cos x$

  $f''(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} - \gamma\cos x - \delta\sin x + 2\cos x - x\sin x$

  $f(-x) = \alpha e^{-x} + \beta e^x + \gamma\cos x - \delta\sin x + x\sin x$

  Donc

  $$f''(x) + f(-x)$$

  $= (\alpha+\beta)e^x + (\alpha+\beta)e^{-x} + 0.\cos x - 2\delta\sin x + 2\cos x$

  D'où

  $$f \text{ solution de } (E)$$

  $\iff \quad (\alpha+\beta) = 0 \quad \text{et} \quad \delta = 0$

  $\iff \quad f(x) = \alpha(e^x - e^{-x}) + \gamma\cos x + x\sin x$
- Conclusion : On retrouve bien la forme trouvée par la première méthode.