

1 Développement limités

Propriété 1 : « petit o » et fonction epsilon

Soit f une fonction définie au voisinage de 0

$$f(h) = o(h^n) \quad \text{en } 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f(h) = h^n \cdot \varepsilon(h) \\ \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \end{cases}$$

Démonstration

Posons $\varepsilon(h) = \frac{f(h)}{h^n}$ D'où $f(h) = h^n \cdot \varepsilon(h)$

$\Rightarrow$ Si $f(h) = o(h^n)$ Alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^n} = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

$\Leftarrow$ réciproquement : si $f(h) = h^n \cdot \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

Alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \Rightarrow f(h) = o(h^n)$

Propriété 2 : la magie des zépsylonnnes et petizos

Soient f, g des fonctions définies au voisinage de 0.

a) $f(h) = o(h^p) \Rightarrow h^n \cdot f(h) = o(h^{n+p})$

ou encore $h^n \cdot o(h^p) = o(h^{n+p})$

b) Si $n < p$

alors $f(h) = o(h^n)$ et $g(h) = o(h^p) \Rightarrow (f+g)(h) = o(h^n)$

et $f(h) = o(h^n) \Rightarrow f(h) + a \cdot h^p = o(h^n)$

ou encore $o(h^n) + o(h^p) = o(h^n)$ et $o(h^n) + o(h^p) = o(h^n)$

(Les petites puissances bouffent les grosses en 0)

c) $f(h) \sim a \cdot h^p$ avec $a \neq 0 \Rightarrow o(f(h)) = o(h^p)$

Exemples :

$$3x^2 + x^3 = 2x^2 + o(x^2)$$

$$2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + o(x^3) = 2x^2 + 3x^3 + o(x^3)$$

Cela veut dire que dans un calcul x^4 n'a aucune signification devant $o(x^3)$

Démonstration

a) Si $f(h) = o(h^p)$

$$\Rightarrow f(h) = h^p \cdot \varepsilon(h)$$

$$\Rightarrow h^n \cdot f(h) = h^{n+p} \cdot \varepsilon(h)$$

$$\Rightarrow h^n \cdot f(h) = o(h^{n+p})$$

b) Soit $n < p$

• Si $f(h) = o(h^n)$ et $g(h) = o(h^p)$

$$\Rightarrow f(h) = h^n \cdot \varepsilon_1(h) \text{ et } g(h) = h^p \cdot \varepsilon_2(h)$$

$$\Rightarrow (f+g)(h) = h^n \cdot \varepsilon_1(h) + h^p \cdot \varepsilon_2(h)$$

$$= h^n \cdot (\varepsilon_1(h) + h^{p-n} \cdot \varepsilon_2(h))$$

$$= h^n \cdot \varepsilon_3(h)$$

$$\text{avec } \varepsilon_3(h) = \varepsilon_1(h) + h^{p-n} \cdot \varepsilon_2(h)$$

$$\text{Or } n < p \Rightarrow p - n > 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} h^{p-n} = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_3(h) = 0$$

$$\text{D'où } (f+g)(h) = o(h^n)$$

• De même :

$$f(h) + a \cdot h^p = h^n \cdot \varepsilon_1(h) + a \cdot h^p = h^n (\varepsilon_1(h) + a \cdot h^{p-n}) = h^n \cdot \varepsilon_2(h)$$

$$\text{avec } \varepsilon_2(h) = \varepsilon_1(h) + a \cdot h^{p-n} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f(h) = o(h^n)$$

c) Supposons $f(h) \sim a \cdot h^p$ avec $a \neq 0$

$$\text{Alors } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^p} = a$$

Soit $g(h) = o(f(h))$ (Montrons que $g(h) = o(h^p)$)

$$\Rightarrow g(h) = f(h) \cdot \varepsilon(h) \Rightarrow \frac{g(h)}{h^p} = \frac{f(h)}{h^p} \cdot \varepsilon(h) = \frac{f(h)}{h^p} \cdot \varepsilon(h)$$

$$\text{Or } \frac{f(h)}{h^p} \rightarrow a \text{ et } \varepsilon(h) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{g(h)}{h^p} \rightarrow 0$$

Donc $g(h) = o(h^p)$ q avec $g(h) = o(f(h))$

On a bien $o(f(h)) = o(h^p)$

Définition 1 : DL

Soit une fonction f une fonction définie au voisinage de x_0 .

f admet un développement limité d'ordre n en x_0 si on a :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= a_0 + a_1.h + \cdots + a_n.h^n + o(h^n) \\ &= a_0 + a_1.h + \cdots + a_n.h^n + h^n \varepsilon(h) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$

Propriété 3 fonction continue

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. Alors

f admet un DL d'ordre 0 en x_0 :

$\iff f$ est continue en x_0

Dans ce cas : $f(x_0 + h) = a_0 + o(1) = a_0 + \varepsilon(h)$ avec $a_0 = f(x_0)$

Démonstration

$\Rightarrow$ Supposons que f admet un $DL_0(x_0)$:

$$f(x_0 + h) = a_0 + \varepsilon(h)$$

Quand $h \rightarrow 0$, $\varepsilon(h) \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_0 + h) \rightarrow a_0$

Donc f est continue en x_0 et $f(x_0) = a_0$

$\Leftarrow$ Supposons f continue en $x_0 \in I$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$$

On pose alors $\varepsilon(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

Propriété 4 fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable en x_0

Alors f admet un DL d'ordre 0 en x_0 :

$\iff f$ est dérivable en x_0

Et dans ce cas : $f(x_0 + h) = a_0 + a_1.h + o(h)$

avec $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$

Démonstration

$\Rightarrow$ Supposons que f admet un $DL_1(x_0)$:

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1.h + o(h^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = a_0$$

D'où f continue en x_0 et $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0$

$$\text{D'autre part : } \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{a_1.h + o(h)}{h} = a_1 + o(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a_1$$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$

$\Leftarrow$ Supposons f dérivable en $x_0 \in I$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon(h)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + h.f'(x_0) + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

f admet bien un DL à l'ordre 1 en x_0

Propriété 5 : Troncature

Soient n deux entiers

Si f admet un DL à l'ordre n :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=1}^n a_k h^k + o(h^n)$$

Alors f admet aussi un DL à tout ordre p plus petit que n :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=1}^p a_k h^k + o(h^p)$$

Cela signifie qu'on peut toujours abaisser l'ordre d'un DL. Le contraire est bien sûr impossible

Exemple :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ en } 0 \Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Démonstration

$$\text{Supposons } f(x_0 + h) = \sum_{k=1}^n a_k h^k + o(h^n)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x_0 + h) &= \sum_{k=1}^p a_k h^k + \sum_{k=p+1}^n a_k h^k + h^n \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \\ &= \sum_{k=1}^p a_k h^k + h^p \left(\sum_{k=p+1}^n a_k h^{k-p} + h^{n-p} \varepsilon(h) \right) \\ &= \sum_{k=1}^p a_k h^k + h^p \varepsilon'(h) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \varepsilon'(h) = \left(\sum_{k=p+1}^n a_k h^{k-p} \right) + h^{n-p} \varepsilon(h)$$

$$\text{Or, pour } k \in [[p+1, n]], \quad k - p \geq 1 \Rightarrow h^{k-p} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0$$

$$\text{et donc } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon'(h) = 0$$

$$\text{D'où } f(x_0 + h) = \sum_{k=1}^p a_k h^k + o(h^p)$$

Propriété 6 : Unicité du DL

Soit une fonction f une fonction définie au voisinage de x_0 .

Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0 alors ce développement limité est unique. C'est-à-dire :

Quand il existe, le n -uplet $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n)$$

est unique

Démonstration

- Montrons, par récurrence, que,
pour tout $n \geq 0$, le DL à l'ordre n , quand il existe, est unique

- Initialisation : Pour $n = 0$
Supposons l'existence d'un DL à l'ordre 0
On a : $f(x_0 + h) = a_0 + o(1) = b_0 + o(1) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = a_0 = b_0$

Ce qui prouve l'unicité

- Hérédité : on suppose la propriété vraie à un rang n
Supposons que f admette deux DL à l'ordre $n+1$:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k h^k + o(h^{n+1})$$

$$\text{et } f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k h^k + o(h^{n+1})$$

Par troncature, on a deux DL à l'ordre n

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^n b_k h^k + o(h^n)$$

D'après l'hypothèse de récurrence, les deux DL_n sont identiques.

C'est-à-dire $(a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_n)$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + a_{n+1} h^{n+1} + o(h^{n+1})$$

$$\text{et } f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + b_{n+1} h^{n+1} + o(h^{n+1})$$

En soustrayant, on obtient

$$0 = (a_{n+1} - b_{n+1}) h^{n+1} + o(h^{n+1}) = (a_{n+1} - b_{n+1}) h^{n+1} + h^{n+1} \varepsilon(h)$$

$$\Rightarrow 0 = a_{n+1} - b_{n+1} + \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - b_{n+1} = 0$$

Cela prouve l'unicité du DL à l'ordre $n+1$ (quand il existe)

Définition 2 : Forme normalisée d'un DL

On appelle forme normalisée d'un DL au voisinage de x_0 l'écriture sous la forme :

$$f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_p + a_{p+1} h + \dots + a_{p+n} h^n + o(h^n)) \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0$$

Propriété 7 : Équivalent et DL

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } f \text{ définie au voisinage de } x_0 \text{ et } a \neq 0. \text{ Alors} \\ f(x_0 + h) = a.h^p + o(h^p) \iff f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a.h^p \end{array} \right.$$

Exemple : Équivalent de $e^x - 1 - x$ en 0

$$\text{On a : } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\Rightarrow e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\Rightarrow e^x - 1 - x \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

2 Opération sur les DL**Propriété 8 : combinaison linéaire**

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soient } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^k) \text{ en } 0 \\ g(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n b_k h^k + o(h^k) \text{ en } 0 \\ \text{On a alors} \\ (\lambda.f + \mu.g)(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n (\lambda.a_k + \mu.b_k) h^k + o(h^k) \text{ en } 0 \end{array} \right.$$

Propriété 9 : produit

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soient } f, g \text{ deux fonction admettant un DL à l'ordre } n \text{ en } x_0 \\ \text{Alors } f.g \text{ admet aussi un DL à l'ordre } n \text{ en } x_0 \end{array} \right.$$

Propriété 10 : quotient

$$\left\| \begin{array}{l} \text{On se ramène à la forme normalisée et on utilise le DL de } \frac{1}{1-x} \end{array} \right.$$

Exemple : $\tan x$

Propriété 11 : composition

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^k) \text{ en } 0 \\ \text{Et } g \text{ une fonction telle que } \lim_{h' \rightarrow 0} g(h') = 0 \\ \text{On a alors } f(x_0 + g(h')) = \sum_{k=0}^n a_k (g(h'))^k + o((g(h'))^k) \text{ en } 0 \end{array} \right.$$

Idée Dans un DL, on peut remplacer h qui tend vers 0 par une autre variable $g(h')$ qui tend aussi vers 0

Exemples

$$\bullet \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \text{ en } 0$$

Quand $x \rightarrow 0$, $x^2 \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + o(x^6) \text{ en } 0$$

$$\bullet \quad DL_3(0) \text{ de } f(x) = \frac{1}{1+2x-x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+X} \text{ avec } X = 2x - x^2 \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)$$

$$X = 2x - x^2$$

$$X^2 = (2x - x^2)^2 = 4x^2 - 4x^3 + o(x^3)$$

$$X^3 = 8x^3$$

$$o(X^3) = o(x^3)$$

D'où

$1 - X$	$=$	1	$-2x$	$+x^2$	
$+X^2$	$=$		$4x^2$	$-4x^3$	$+o(x^3)$
$-X^3 + o(X^3)$	$=$			$-8x^3$	$+o(x^3)$
$f(x)$	$=$	1	$-2x$	$+5x^2$	$-12x^3 + o(x^3)$

Propriété 12 : Primitive d'un DL

Si f admet un DL en 0 à l'ordre n

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o(h^n) \text{ en } 0$$

Alors toute primitive F de f admet aussi un DL en 0 à l'ordre $n+1$

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{h^{k+1}}{k+1} + o(h^{n+1}) \text{ en } 0$$

Attention : on peut intégrer des DL pas forcément les dériver !

Propriété 13 : DL en 0 d'une fonction paire, impaire

Soit f admet un DL d'ordre n en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

- Si f est paire, alors tous les termes de rang impairs sont nuls.
- Si f est impaire, alors tous les termes de rang pairs sont nuls.

Démonstration

Supposons $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$

- Cas f paire On a : $f(x) = f(-x)$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k (-x)^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k x^k + o(x^n)$$

Par unicité du DL, on a : $a_k = (-1)^k a_k$

Donc pour k impair : $(-1)^k = -1 \Rightarrow a_k = -a_k \Rightarrow a_k = 0$

- Cas f impaire : On a : $-f(x) = -f(-x)$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n -a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k x^k + o(x^n)$$

Par unicité du DL, on a : $-a_k = (-1)^k a_k$

Donc pour k pair : $(-1)^k = 1 \Rightarrow -a_k = a_k \Rightarrow a_k = 0$

3 Utilisation des DL**3.1 Limite de la dérivée****Propriété 14 : Théorème de limite de la dérivée**

Soit f une fonction telle que

- f continue sur un intervalle I
- f dérivable sur $I - \{a\}$
- $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell$ finie ou infinie

Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$

Propriété 15 : Conséquence : dans le cas fini

Soit f une fonction telle que

- f continue sur un intervalle I
- f dérivable sur $I - \{a\}$
- $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell$ existe et est **finie**

Alors

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ **finie**
- Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$
- $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a)$ donc la dérivée f' est continue en a

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x > -1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $] -1; +\infty[$
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. En déduire que f est de classe $] -1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

méthode

Pour déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ on procède en 4 étapes

1. Écriture de $f'(x)$ sous forme d'un seul quotient $\frac{N(x)}{D(x)}$
2. Équivalent de $D(x)$
3. DL du du numérateur $N(x)$ au même ordre que $D(x)$ puis équivalent de $N(x)$
4. Équivalent, puis limite de $f'(x)$. Conclusion

Solution

1. Montrer que f est continue sur $] -1; +\infty[$

- Sur $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Donc f est continue comme quotient de fonctions continues.

- En 0

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \\ \Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f(0)$$

Donc f est continue en 0

- Conclusion : f est continue sur $] -1; +\infty[$

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$

f est C^1 sur $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$ comme quotient de fonction C^1

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \frac{N(x)}{D(x)} \text{ (Etape 1)}$$

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. En déduire que f est de classe $] -1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

Cherchons des équivalents de $N(x)$ et $D(x)$

$$\text{(Etape 2) : } D(x) = x^2(1+x) \quad \text{En } 0 \quad 1+x \sim x \Rightarrow D(x) \sim x^2$$

(Etape 3) : Pour $N(x)$ on va faire un DL à l'ordre 2 :

$$N(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ x \cdot \ln(1+x) &= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$(1+x)\ln(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^2)$$

$$\text{Donc } N(x) = x - (1+x)\ln(1+x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\Rightarrow N(x) \sim -\frac{1}{2}x^2$$

$$\text{(Etape 4) : Donc : } f'(x) \sim \frac{(-1/2)x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$$

En déduire que f est de classe $] -1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

- f est continue sur $] -1; +\infty[$
- et dérivable sur $] -1; +\infty[\setminus \{0\}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$

Donc

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$$

- Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1/2$

- $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$ donc la dérivée f' est continue en a

Or f est déjà C^1 sur $] -1; +\infty[\setminus \{0\}$

Conclusion : f est donc C^1 sur $] -1; +\infty[$

3.2 Allure de C_f au voisinage d'un point

Propriété 16 : Position d'une courbe par rapport à sa tangente

- Soit f admettant un DL à l'ordre 2 au voisinage de x_0 :
- $$f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + o(h^2)$$
- Alors, au voisinage de x_0
- si $a_2 > 0$, alors C_f est **au-dessus** de sa tangente
 - si $a_2 < 0$, alors C_f est **au-dessous** de sa tangente

Démonstration

En effet, d'après les propriétés précédentes pour un DL à l'ordre 1, f admet un DL à l'ordre 1.,

Donc f est continue et dérivable en x_0 avec $a_0 = f(x_0)$ $a_1 = f'(x_0)$

La tangente à donc pour équation

$$y = a_0 + a_1h$$

$$\iff y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{car } x = x_0 + h$$

$$\text{Et donc } f(x_0 + h) - (a_0 + a_1h) = a_2h^2 + o(h^2)$$

Si $a_2 > 0$, on aura donc $f(x_0 + h) - (a_0 + a_1h) \geq 0$

C'est-à-dire : $f(x_0 + h) \geq a_0 + a_1h$ au voisinage de x_0

La courbe est donc bien au-dessus de sa tangente

Même raisonnement pour $a_2 < 0$

4 L'usine à DL (DL classiques)

Propriété 17 : Formule de Taylor Young en x_0

- Soit une fonction f de classe C^n sur un intervalle I contenant x_0 .
Alors
- $$\forall (x_0 + h) \in I, f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

Et en prenant $x_0 = 0$, on obtient la formule de TY en 0 :

Propriété 18 : Formule de Taylor Young en 0

Soit une fonction f de classe C^{n+1} sur un intervalle I contenant 0.

$$\text{Alors } \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

La formule de Taylor Young fournit un grand nombre de DL de base :

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
- $\text{sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(x^7) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$
- $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

$$\bullet \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

Autres méthodes

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- En primitivant :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)\end{aligned}$$

- En primitivant :

$$\begin{aligned}(\arctan)'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + x^{2n} + o(x^{2n}) \\ \Rightarrow \quad \arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})\end{aligned}$$

- $\tan$ à l'ordre 3 : $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$