

1 Limites

1.1 Rappels

Propriété 1 : Valeur absolue (Rappel)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } r \geq 0 \\ |x| \leq r \iff -r \leq x \leq r \\ |x - x_0| < r \iff -r < x - x_0 < r \iff x_0 - r < x < x_0 + r \end{array} \right.$$

Définition 1 : $\overline{\mathbb{R}}$

$$\left| \text{On note } \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \right.$$

Définition 2 : Voisinages

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } a \in \overline{\mathbb{R}}. \text{ On appelle voisinage de } a \text{ tout intervalle du type} \\ \bullet]a - r, a + r[\text{ avec } r > 0 \text{ si } a \in \mathbb{R} \\ \bullet]A, +\infty[\text{ si } a = +\infty \\ \bullet]-\infty, A[\text{ si } a = -\infty \end{array} \right.$$

Exemples :

- f est positive au voisinage de $+\infty$ ssi
 $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow f(x) \geq 0$
- f est positive au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ ssi
 $\exists r > 0, \forall x \in I, |x - a| < r \Rightarrow f(x) \geq 0$

$$f(x) = x^2 - x$$

- f est positive au voisinage de $+\infty$ En effet, $f \geq 0$ sur $[1, +\infty[$
- f est strictement négative au voisinage de tout $a \in]0, 1[$
 En effet, soit $a \in]0, 1[$ et $h = \min(1 - a, a) > 0$
 On a $0 < a - h < a + h < 1 \Rightarrow]a - h, a + h[\subset]0, 1[$
 $\Rightarrow f < 0$ sur $]a - h, a + h[\Rightarrow f < 0$ au voisinage de a

1.2 Limites

Définition 3 : Limite finie en x_0

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \\ \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \\ \quad x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \end{array} \right.$$

Propriété 2 : Limite finie en x_0

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell \\ \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall h \in \mathbb{R}, |h| \leq \alpha \Rightarrow |f(x_0 + h) - \ell| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

Définition 4 : Limite finie à droite

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell \\ \iff \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(x_0 + h) = \ell \\ \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, x_0 < x \leq x_0 + \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall h \in \mathbb{R}, 0 < h \leq \alpha \Rightarrow |f(x_0 + h) - \ell| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

Définition 5 : Limite finie à gauche

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell \\ \iff \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x_0 + h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} f(x_0 + h) = \ell \\ \iff \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 - h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(x_0 - h) = \ell \\ \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall h \in \mathbb{R}, 0 < h \leq \alpha \Rightarrow |f(x_0 - h) - \ell| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

Remarque : L'intérêt de cette dernière transformation tient au fait qu'il est toujours plus intéressant de travailler avec des nombres positifs plutôt qu'avec des nombres négatifs. Cela minimise grandement les risques d'erreurs.

Définition 6 : Limite infinie

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = +\infty \\ \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq M \\ \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall h \in \mathbb{R}, |h| \leq \alpha \Rightarrow f(x_0 + h) \geq M \end{array} \right.$$

Définition 7 : Limite infinie

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \\ \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq M \end{array} \right.$$

Définition 8 : Limite finie en l'infini

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \\ \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

Définition 9 : limite infinie en l'infini

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq A \Rightarrow f(x) \geq M \\ \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow f(-x) \geq M \\ \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = +\infty \end{array} \right.$$

1.3 Exemples**• Exemple 1** $f(x) = x^2 + x + 1$. Limite en $x_0 = 2$

$$|f(2+h) - f(2)| = |(1+h)^2 + (2+h) + 1 - 7| = |5h + h^2| = (5 + |h|)|h| \leq 6|h| \text{ pour } |h| \leq 1$$

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\alpha = \inf(\varepsilon/6, 1)$

Soit h tel que $|h| \leq \alpha$

Donc $|h| \leq \varepsilon/6$ et $|h| \leq 1$

$$|f(2+h) - f(2)| = (5 + |h|)|h| \leq 6|h| \text{ car } |h| \leq 1$$

$$\Rightarrow |f(2+h) - f(2)| \leq \varepsilon \text{ car } |h| \leq \varepsilon/6$$

Donc $|f(2+h) - f(2)| < \varepsilon$. CQFD.

• Exemple 2 $f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$. Limite en $x_0 = 1$

Cela revient à montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} |f(1+h) - f(1)| = 0$

$$\text{avec } |f(1+h) - f(1)| = \left| \frac{(1+h)+1}{3(1+h)-2} - 2 \right| = \left| \frac{-5h}{1+3h} \right| = 5|h| \frac{1}{|1+3h|}$$

Idée :

On veut que $\frac{1}{|1+3h|}$ soit majoré, donc que $|1+3h|$ soit minoré.

Or $|1+3h| \geq |1-3|h| = 1-3|h|$ pour h « petit »

On peut donc, pour $|h|$ assez petit, minorer $|1+3h|$ par tout nombre strictement inférieur à 1. Par exemple on peut avoir

$$1-3|h| \geq 1/2 \iff 1/2 \geq 3|h| \iff |h| \leq 1/6$$

$$\text{D'où } \frac{1}{|1+3h|} \leq 2$$

$$\Rightarrow |f(1+h) - f(1)| = 5|h| \cdot \frac{1}{|1+3h|} \leq 10|h|$$

Il suffit donc d'avoir $|h| < 1/6$ et $|h| < \varepsilon/10$

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\alpha = \inf(\varepsilon/10, 1/6)$

Soit h tel que $|h| \leq \alpha$

Donc $|h| \leq \varepsilon/10$ et $|h| \leq 1/6$

Or $|1+3h| \geq |1-3|h|$

avec $|h| \leq 1/6 \Rightarrow -3|h| \geq -1/2 \Rightarrow 1-3|h| \geq 1/2 \Rightarrow |1-3|h| \geq 1/2$

$$\text{D'où } |1+3h| \geq |1-3|h| \geq 1/2 \Rightarrow \frac{1}{|1+3h|} \leq 2$$

$$\Rightarrow |f(1+h) - f(1)| = 5|h| \frac{1}{|1+3h|} \leq 10|h|$$

Or $|h| \leq \varepsilon/10 \Rightarrow |f(1+h) - f(1)| \leq \varepsilon$ CQFD

2 Propriétés des limites

2.1 Conservation de l'ordre

Lemme : Conservation de l'ordre

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que

- $f \leq g$ au voisinage de x_0
- Quand $x \rightarrow x_0$, $f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ et $g(x) \rightarrow \ell' \in \mathbb{R}$

Alors $\ell \leq \ell'$

Démonstration : Dans le cas où $x_0 \in \mathbb{R}$ et ℓ, ℓ' finies

- $f \leq g$ au voisinage de x_0
Donc il existe un voisinage de $]x_0 - r, x_0 + r[$ tel que
 $\forall x \in I, |x_0 - x| < r \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ (1)
D'autre part : quand $x \rightarrow x_0$, $f(x) \rightarrow \ell_1$ et $g(x) \rightarrow \ell_1$
- Par l'absurde, supposons $\ell > \ell'$

- Prenons $\varepsilon_0 = \frac{\ell' - \ell}{3} > 0$

Remarque il faut prendre ε_0 assez petit pour que les intervalles $[\ell' - \varepsilon_0, \ell' + \varepsilon_0[$ et $[\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0[$ soient disjoints, ce qui équivaut à prendre $\varepsilon_0 < \frac{\ell' - \ell}{2}$

On a donc $\ell' < \ell' + \varepsilon_0 < \ell - \varepsilon_0 < \ell$ (4) (Vérification triviale)

- $f(x) \rightarrow \ell_1$ et $g(x) \rightarrow \ell_1$ Donc :
 $\exists \alpha_1 > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon_0 \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon_0$ (2)
 $\exists \alpha_2 > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha_2 \Rightarrow \ell' - \varepsilon_0 \leq g(x) \leq \ell' + \varepsilon_0$ (3)

- Posons $\alpha = \inf(r, \alpha_1, \alpha_2) > 0$

Pour $|x - x_0| \leq \alpha$, on a donc, d'après (2)(3)(4)

$$g(x) \leq \ell' + \varepsilon_0 < \ell - \varepsilon_0 \leq f(x)$$

$\Rightarrow g(x) < f(x)$ Et d'autre part $f(x) \leq g(x)$ d'après (1) D'où la contradiction

Conclusion : on a donc bien $\ell \leq \ell'$

Propriété 3 : Unicité de la limite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors, si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en x_0 , cette limite est unique

(C'est ce qui justifie l'écriture $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$)

Démonstration : Il suffit de poser $g = f$ et d'appliquer le lemme précédent.

Propriété 4 : Inégalités

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I telles que :

- $f \leq g$ au voisinage de x_0
- f et g admettent une limite en x_0

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Démonstration : C'est une conséquence directe du lemme.

Propriété 5 : Inégalités (bis)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 et $a \in \mathbb{R}$

- Si $f \leq a$ au voisinage de x_0 Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq a$
- Si $f \geq a$ au voisinage de x_0 Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq a$

Conséquence directe en posant $g(x) = a$ ou $f(x) = a$

2.2 Opérations

Propriété 6 : limite finie en un point de I

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite finie en un point x_0 de l'intervalle I

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

(Et donc f sera continue en x_0)

Démonstration (a revoir)

Soit f définie en x_0 et qui admet une limite ℓ en x_0

D'après la définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

En particulier, pour $x = x_0$, on a $|x - x_0| \leq \alpha$ donc $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

C'est-à-dire , $\forall \varepsilon > 0, |f(x_0) - \ell| \leq \varepsilon$

Par l'absurde, supposons que $|f(x_0) - \ell| \neq 0$

$$\text{Prenons } \varepsilon_0 = \frac{|f(x_0) - \ell|}{2} > 0$$

On a alors $|f(x_0) - \ell| \leq \varepsilon_0$

$$\Rightarrow 2\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0 \quad \text{car} \quad \varepsilon = \frac{|f(x_0) - \ell|}{2}$$

$\Rightarrow \varepsilon_0 \leq 0$ Ce qui est contradictoire avec $\varepsilon_0 > 0$

Donc $\ell = f(x_0)$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Propriété 7 : Opérations

Soit $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$.
Si f et g admettent des limites finies ℓ et ℓ' en x_0
alors $a.f + b.g$, $f.g$, f/g admettent respectivement $a.\ell + b.\ell'$, $\ell.\ell'$, ℓ/ℓ' (si $\ell' \neq 0$) comme limites.

Démonstration (cas de la somme)

Soit $\varepsilon > 0$

$$\exists \alpha_1 > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2$$

$$\exists \alpha_2 > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha_2 \Rightarrow |g(x) - \ell'| \leq \varepsilon/2$$

Posons $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2) > 0$

Soit $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \alpha$

On a donc $|x - x_0| \leq \alpha_1$ et $|x - x_0| \leq \alpha_2$

D'où : $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2$ et $|g(x) - \ell'| \leq \varepsilon/2$

$$\Rightarrow |(f+g)(x) - (\ell + \ell')| = |(f(x) - \ell) + (g(x) - \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'|$$

$$\text{Or } |(f+g)(x) - (\ell + \ell')| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

D'où : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I,$

$$|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |(f+g)(x) - (\ell + \ell')| \leq \varepsilon$$

Donc $\lim_{x \rightarrow x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ CQFD

3 Compositions**Propriété 8 : Composée de fonctions**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

- $f(I) \subset J$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z_0$

Alors la composée $g \circ f$ admet une limite en x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = z_0$

Cela se traduit aussi ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \text{qd } x \rightarrow x_0 \quad f(x) \rightarrow y_0 \\ \text{qd } y \rightarrow y_0 \quad g(y) \rightarrow z_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{qd } x \rightarrow x_0 \quad (g(f(x))) \rightarrow z_0$$

Attention : Il faut avoir $f(I) \subset J$.

En effet, pour $x \in I, (g \circ f)(x) = g[f(x)]$ est défini si $f(x) \in I$, donc si : $f(I) \subset J$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$

$$\text{Or } \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z_0$$

donc il existe $\alpha_0 > 0$ tq $\forall y \in J, |y - y_0| \leq \alpha_0 \Rightarrow |g(y) - z_0| \leq \varepsilon$ (1)

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$$

$\Rightarrow$ il existe $\beta_0 > 0$ tq $\forall x \in I, |x - x_0| \leq \beta_0 \Rightarrow |f(x) - y_0| \leq \alpha_0$ (2)

On a $|f(x) - y_0| \leq \alpha_0$ et $f(x) \in J$ car $f(I) \subset J$

Donc $|g(f(x)) - z_0| \leq \varepsilon$ d'après (1)

D'où : $\forall \varepsilon > 0, \exists \beta_0 > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \beta_0 \Rightarrow |(g \circ f)(x) - z_0| \leq \varepsilon$

Donc $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = z_0$

Propriété 9 : image d'une suite par f

Soit f définie sur un intervalle I et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dans I ou à son extrémité.
 telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$
 et une suite u à valeurs dans I tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$
 Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$

Cela revient à un changement de variable :

Quand $x \rightarrow a$, $f(x) \rightarrow \ell$

Or quand $n \rightarrow +\infty$, $x = u_n \rightarrow a$ alors $f(u_n) = f(x) \rightarrow \ell$

Démonstration Pour changer, dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = -\infty$:

Supposons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$

et (u_n) une suite à valeurs dans I telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

donc il existe $A_0 > 0$ tq $\forall x \in I, x \leq A_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ (1)

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = -\infty$

Donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_0 \Rightarrow u_n \leq A_0$

Or $u_n \in I$ (car (u_n) est à valeurs dans I)

Donc, d'après (1) $|f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}, n \geq p_0 \Rightarrow |f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$

Propriété 10 : Conséquence

Soit $f : I \subset \mathbb{R}$ et deux suites (u) et (v) à valeurs dans I telles que

- (u_n) et (v_n) convergent vers la **même** limite a
- $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ convergent vers des limites **différentes**

Alors f n'admet pas de limite en a

En effet, si f admettait une limite ℓ en a , on aurait :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = \ell$$

Exemples : $f(x) = \sin x$ en $+\infty$, $g(x) = \sin(1/x)$ en 0^+

On va construire deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers 0 telles que $f(u_n) \rightarrow 1$ et $f(v_n) \rightarrow -1$

$$\bullet \sin(1/x) = +1 \iff 1/x = \pi/2 + 2k\pi \iff x = \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi}$$

$$\text{Posons donc : } u_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$$

$$\text{Quand } n \rightarrow +\infty, u_n \rightarrow 0 \text{ et } f(u_n) = 1 \text{ donc } f(u_n) \rightarrow 1$$

$$\bullet \sin(1/x) = -1 \iff 1/x = 3\pi/2 + 2k\pi \iff x = \frac{1}{3\pi/2 + 2k\pi}$$

$$\text{Posons donc : } v_n = \frac{1}{3\pi/2 + 2n\pi}$$

$$\text{Quand } n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow 0 \text{ et } f(v_n) = -1 \text{ donc } f(v_n) \rightarrow -1$$

Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$u_n \rightarrow 0 \text{ et } f(u_n) \rightarrow 1$$

$$v_n \rightarrow 0 \text{ et } f(v_n) \rightarrow -1$$

Donc f n'admet pas de limite en 0^+ .

4 Théorèmes de convergence

4.1 Par comparaison

Propriété 11 : Théorème de l'encadrement

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que :

$$f \leq g \leq h \quad \text{au voisinage de } a$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\text{Alors } g \text{ admet une limite en } a \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$$

Propriété 12 : Théorème de comparaison

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I telles que :

$$f \leq g \quad \text{au voisinage de } a$$

$$\bullet \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

$$\bullet \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \quad \text{Alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

4.2 Théorèmes de la limite monotone

Propriété 13 : Cas croissant

Soit f une fonction croissante sur $]a, b[$ avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

$$\bullet \text{ Si } f \text{ est majorée par } M \text{ sur }]a, b[$$

Alors f admet une limite à gauche en b

$$\text{et on a : } \forall x \in]a, b[, \quad f(x) \leq \lim_{b^-} f \leq M$$

$$\text{Sinon } \lim_{b^-} f = +\infty$$

$$\bullet \text{ Si } f \text{ est minorée par } m \text{ sur }]a, b[$$

Alors f admet une limite à droite en a

$$\text{et on a : } \forall x \in]a, b[, \quad m \leq \lim_{a^+} f \leq f(x)$$

$$\text{Sinon } \lim_{a^+} f = -\infty$$

Propriété 14 : Cas décroissant

$$\bullet \text{ Si } f \text{ est majorée par } M \text{ sur }]a, b[$$

Alors f admet une limite à droite en a

$$\text{et on a : } \forall x \in]a, b[, \quad f(x) \leq \lim_{a^+} f \leq M$$

$$\text{Sinon } \lim_{a^+} f = +\infty$$

$$\bullet \text{ Si } f \text{ est minorée par } m \text{ sur }]a, b[$$

Alors f admet une limite à gauche en b

$$\text{et on a : } \forall x \in]a, b[, \quad m \leq \lim_{b^-} f \leq f(x)$$

$$\text{Sinon } \lim_{b^-} f = -\infty$$

Il suffit de remplacer f décroissante par $-f$ qui est croissante et d'utiliser les résultats précédents.

5 Continuité

Définition 10 : Continuité en un point

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Définition 11 : continuité sur un intervalle

f est continue sur I si et seulement si elle continue en tout point de I

Propriété 15 : $C^0(I)$

L'ensemble des application continues sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de l'espace des application de I dans $\mathbb{R}$

On le note $C^0(I)$.

Propriété 16 : Composée

Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues telles que $f(I) \subset J$

Alors $g \circ f$ est continue sur I .

Définition 12 : Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ telle que f admet une limite finie en x_0 .

Alors on dit que f est prolongeable par continuité en x_0 .

On définit alors une nouvelle fonction $\tilde{f}$ sur I de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ \tilde{f}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est appelé le prolongement par continuité de f en x_0

f et $\tilde{f}$ coïncident donc sur $I \setminus \{x_0\}$.

Remarque D'un point de vue formel, les fonctions f et $\tilde{f}$ sont distinctes. (En effet elles n'ont pas le même ensemble de définition). Mais dans la pratique, il est assez courant d'identifier la fonction f et son prolongement par continuité $\tilde{f}$ quand cela ne prête pas à conséquence.

6 Théorème des valeurs intermédiaires**Définition 13 : Intervalle**

$I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si :

$$\forall (a, b) \in I^2, a \leq b \Rightarrow [a, b] \subset I$$
Définition 14 : Segment

On appelle segment un intervalle fermé borné, c'est-à-dire tout intervalle de la forme $[a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leq b$

Propriété 17 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soient f une application continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$ et y_0 un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Alors il existe (au moins) un réel x_0 dans $[a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$

- Remarque 1 : On ne peut pas dire que $y_0 \in [f(a), f(b)]$ car cela n'a de sens que si $f(a) \leq f(b)$. Il faudrait donc séparer deux cas : $f(a) \leq f(b)$ ou $f(b) \leq f(a)$. On adopte donc une formulation plus générale : « y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ »

- Remarque 2 : L'idée est la suivante : Quand x va de a à b , $f(x)$ va de $f(a)$ à $f(b)$ et donc $f(x)$ « passera » entre deux par y_0 , donc qu'on aura bien $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = y_0$.

- Remarque 3 : La continuité est essentielle.

Par exemple si on prend $f(x) = \lfloor x \rfloor$: $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ et bien évidemment $y_0 = 1,5$ n'a aucun antécédent par f dans $[1, 2]$

Démonstration

Dans le cas où $a < b$ et $f(a) < y_0 < f(b)$

I est un intervalle donc $[a, b] \subset I$

On va construire deux suites a_n et b_n par dichotomie et poser

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \text{ le milieu de } [a_n, b_n]$$

Initialisation : On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$

Récurrence : Si a_n , b_n , c_n existent

- Si $f(c_n) \leq y_0$, alors $\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$
- Sinon (pour $f(c_n) > y_0$) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$

§ **Étape 1** : On montrer par une récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n \text{ et } f(a_n) \leq y_0 \leq f(b_n)$$

- Initialisation : Pour $n = 0$

$$a_0 = a < b = b_0 \text{ et } f(a_0) = f(a) \leq y_0 \leq f(b) = f(b_0) \text{ par hypothèses}$$

Vrai au rang $n = 0$

- supposons la propriété vraie à un rang n donné

$$\text{On a } a_n \leq b_n \text{ et } f(a_n) \leq y_0 \leq f(b_n)$$

$$\S \text{ 1er cas : } f(c_n) \leq y_0 \text{ Alors } \begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - c_n = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \geq 0 \text{ (H.R.)}$$

$$f(a_{n+1}) = f(c_n) \leq y_0 \text{ et } f(b_{n+1}) = f(b_n) \geq y_0 \text{ (H.R.)}$$

D'où $f(a_{n+1}) \leq y_0 \leq f(b_{n+1})$

§ 2eme cas : $f(c_n) > y_0$ alors $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geq 0 \quad (\text{H.R.})$$

$$f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq y_0 \quad \text{et} \quad f(b_{n+1}) = f(c_n) > y_0 \quad (\text{H.R.})$$

D'où $f(a_{n+1}) \leq y_0 \leq f(b_{n+1})$

Dans tous les cas, la propriété est vraie au rang $n + 1$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_{n+1}) \leq y_0 \leq f(b_{n+1})$

et $b_{n+1} - a_{n+1} \geq 0$ avec $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$

Donc $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$

§ **Étape 2** : montrons que a_n est croissante et b_n décroissante Soit $n \in \mathbb{N}$

• 1er cas : $f(c_n) \leq y_0 \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geq 0 \quad b_{n+1} - b_n = 0 \leq 0$$

• 2eme cas : $f(c_n) > y_0 \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$

$$a_{n+1} - a_n = 0 \geq 0 \quad b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$$

• Conclusion : Dans tous les cas $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et $b_{n+1} - b_n \leq 0$

Donc (a_n) est croissante et (b_n) décroissante

§ **Étape 3** :

- (a_n) est croissante
- (b_n) décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$

Donc les suites a et b sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq x_0 \leq b_n$

En particulier on a $a = a_0 \leq x_0 \leq b_0 = b$

$$\Rightarrow x_0 \in [a, b] \text{ avec } [a, b] \subset I \text{ (car } I \text{ intervalle)}$$

$$\Rightarrow x_0 \in I$$

§ **Étape 4** :

Or f est continue sur I donc en particulier en x_0

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(x_0)$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) \leq y_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq y_0 \Rightarrow f(x_0) \leq y_0$$

$$\text{Et } \forall n \in \mathbb{N}, f(b_n) \geq y_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \geq y_0 \Rightarrow f(x_0) \geq y_0$$

$$\text{Donc } f(x_0) = y_0$$

Il existe donc bien $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y_0$ CQFD

On a la conséquence suivante :

Propriété 18 : fonction continue sur un intervalle

|| Soit f une application continue sur un intervalle I .
|| Alors $f(I)$ est également un intervalle

Démonstration

Rappelons que A est un intervalle de $\mathbb{R}$ ssi

$$\forall (x, y) \in A^2, x < y \Rightarrow [x, y] \subset A$$

Soit donc une fonction f continue sur un intervalle I

Il faut montrer que $f(I)$ est un intervalle

• Soient $y_1 < y_2$ deux éléments de $f(I)$

Il faut montrer que $[y_1, y_2] \subset f(I)$

$y_1, y_2 \in f(I)$. Il existe donc $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$

On a $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$ ($x_1 = x_2$ est impossible car $f(x_1) \neq f(x_2)$)

• 1er cas : $x_1 < x_2$

Soit $y \in [y_1, y_2]$

$$\Rightarrow f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$$

Or f est continue, donc d'après le TVI sur $[x_1, x_2]$,

il existe $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que $y = f(x_0)$

D'autre part, I est un intervalle

$$\Rightarrow [x_1, x_2] \subset I \Rightarrow x_0 \in I$$

$$\Rightarrow y \in f(I)$$

Conclusion : $[y_1, y_2] \subset f(I)$

- 2ème cas : $x_1 > x_2$

Soit $y \in [y_1, y_2]$

En appliquant le TVI sur $[x_2, x_1]$, on obtient de même

$y \in f(I)$

Donc $[y_1, y_2] \subset f(I)$

- Dans tous les cas, on a $[y_1, y_2] \subset f(I)$

Donc on a montré $\forall y_1, y_2 \in f(I), y_1 < y_2 \Rightarrow [y_1, y_2] \subset f(I)$ $f(I)$ est donc bien un intervalle

Propriété 19 : Fonction continue sur un segment

Soit f une fonction continue sur un **segment** $[a, b]$
 alors f est bornée et atteint ses bornes sur cet intervalle.
 C'est-à-dire :
 $\exists(\alpha, \beta) \in [a, b]^2, \forall x \in [a, b], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$

Exemples

- $f :]-1, +1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. f est bornée sur $] -1, +1[$ par 0 et 1
 0 est le minimum de f atteint pour $x = 0$ mais f n'atteint jamais +1 sur $] -1, +1[$
- $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$. f n'est pas majorée sur $]0, 1[$ et est minorée.
 f est minorée par 1 qui n'est pas atteint par f sur $]0, 1[$.
- $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x$. f est continue sur un intervalle fermé borné. Donc f est bornée et atteint ses bornes.
 Son maximum est 6 qu'elle atteint en 2 : $f(2) = 6$
 Son minimum est $-1/4$ et elle l'atteint en $-1/2$: $f(-1/2) = -1/4$.
- A contrario : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$. On a $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ fermé borné
 alors que $\mathbb{R}$ n'est pas un segment.

Démonstration : Résultat admis

Propriété 20 : Conséquence

Soit f une fonction continue sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$.
 Alors $f(I)$ est aussi un segment $[m, M]$ de $\mathbb{R}$.

Attention : En général $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$

Démonstration

Il suffit de prendre $m = f(\alpha)$ et $M = f(\beta)$

On note alors $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$

7 Théorème de la bijection

Propriété 21 : Théorème de la bijection

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si

- f est continue sur I
- f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I .

Alors

- f réalise une bijection de I sur $f(I)$
- Sa bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f (c'est-à-dire : f^{-1} est strictement croissante (resp. décroissante) si f est strictement croissante (resp. décroissante))

Démonstration : Résultat admis

Propriété 22 : Cas d'un intervalle ouvert

Soit f continue et strictement croissante sur un intervalle $I =]a, b[$
 avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$
 Soit $a' = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $b' = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$
 Alors f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $f(I) =]a', b'[$

Démonstration : Résultat admis