

Définition 1 : Fonction indicatrice (A connaître)

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On appelle indicatrice de A la fonction

$$1_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 2 : fonction lipschitzienne (A connaître)

Soit un réel $k > 0$. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est k -lipschitzienne ssi

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Continuité

Exercice 1 Montrer qu'une fonction continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 2

1) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{\lfloor n.x \rfloor}{n}$ et $v_n = \frac{\lfloor n.x\sqrt{2} \rfloor}{n\sqrt{2}}$

A-t-on $u_n \in \mathbb{Q}$? $v_n \in \mathbb{Q}$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

2) En utilisant ces suites, montrer que la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point x de $\mathbb{R}$

3) On pose $f(x) = x.1_{\mathbb{Q}}(x)$ Montroer que la fonction f est continue en 0 et discontinue en tout point de $\mathbb{R}^*$

Exercice 3 Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$

a) Si f et g sont continues en x_0 , $f + g$ l'est-elle aussi?

b) Si f et g sont discontinues en x_0 , $f + g$ l'est-elle aussi? Preuve?

c) Si f est continue et g discontinue en x_0 , $f + g$ l'est-elle aussi? Preuve?

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global. (On pourra utiliser les défintions des limites en $\pm\infty$)

Dérivabilité

Exercice 5 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ k -lipschitzienne ($k > 0$) avec I intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue sur $[a, b]$
2. Soit $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer que f est lipschitzienne.
3. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et périodique. Montrer que g est lipschitzienne.

Exercice 6 (Basique et classique) Soit f de classe C^3 qui s'annule en 4 réels $a < b < c < d$. Montrer que $f^{(3)}$ s'annule au moins une fois.

Exercice 7 $\cos$ et $\sin$

(Idem)

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.
2. En déduire que les fonctions sinus et cosinus sont 1-lipschitziennes.
3. On dit d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qu'elle est contractante si elle est k -lipschitzienne pour un certain $k < 1$.
Montrer que les fonctions sinus et cosinus ne sont pas contractantes.
On pourra raisonner par l'absurde en exploitant la limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0.

Exercice 8

(Basique)

Calculer la dérivée n -ième des fonctions suivantes : $f : x \mapsto \cos(x)$,

$$g : x \mapsto \ln(x+2), \quad h : x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x, \quad k : x \mapsto x^p \quad (p \in \mathbb{N}^*)$$

Exercice 9

(Hyper classique)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \frac{5}{2}x(1-x)$.

a) Soit $I = [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$.

Montrer que I est stable par f (c'est-à-dire $\forall x \in I, f(x) \in I$).

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

b) Mq pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \frac{3}{5}| \leq \frac{5}{8} |u_n - \frac{3}{5}|$. (Avec l'IAF)

c) Conclure quant à la convergence de (u_n) .

Exercice 10 En utilisant l'IAF, trouver un équivalent de

$$u_n = \ln(n+1) - \ln(n-1) \quad \text{en } +\infty$$