

Exercice 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) < g(x)$.

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [a; b], f(x) \leq g(x) - \alpha$.

Exercice 2 (Classique)

Soit f une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \ell > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 3

Soit $u_0 \in [0; 1]$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0; 1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0; 1]$ tel que $\frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$
3. a) Montrer que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque (u_n) converge vers α .
b) Expliciter le calcul à faire pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Exercice 4 op 931

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$

Montrer que les suites u et v sont adjacentes. (On utilisera l'inégalité des accroissements finis)

En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ en $+\infty$

Exercice 5

1. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut être périodique.

Exercice 7

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1) \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - x \exp\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \arctan(x) - \pi}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} + \cos(\pi x)}{\sqrt{4x+5} - 3}$$

Exercice 9

Calculons la dérivée n-ième de la fonction réelle $t \mapsto \cos(t)e^t$.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$. Montrer que

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$$

Exercice 11 (VBasique)

Soient a et b deux réels et $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$.

Donner deux expressions de $f^{(n)}$ dans le cas où $a = b$.

En déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 12

Pour quelles valeurs de a la droite $y = 4x + 3$ est-elle tangente à la courbe représentative de $f : x \mapsto x^2 + ax + 4$?

Exercice 13

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions $f_\lambda : x \mapsto \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$

- a) Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles.
- b) Observer que les tangentes en 1 sont concourantes.