

1) $\sin x = -1 \iff x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (C 103d)

2) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| = |z| + |z'|$ (C 225c)
 $\iff z = 0 \text{ ou } \exists a \in \mathbb{R}^+, z' = a.z$

3) Définition : Soit $z, a \in \mathbb{C}$. (C 320b)
 z est une racine n -ième de $a \iff z^n = a$

4) f dérivable sur $\mathbb{R}$. $g(x) = f(x^2) \Rightarrow g'(x) = (2x).f'(x^2)$ (C 419a)

5) (u_n) arithmétique $\Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$ (C 511b)

6) Suite récurrente linéaire ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (C 545d)
à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cas $\Delta < 0$: les solutions réelles sont de la forme :

$$u_n = \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } r_1 = \alpha + i\beta = \rho e^{i\theta}, \quad r_2 = \alpha - i\beta = \rho e^{-i\theta},$$

$$\text{racines conjuguées de l'équation caractéristique } r^2 - ar - b = 0$$

7) Vrai ou Faux ?... **Vrai** (C 584b)

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}^*, \quad x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0$$

8) $\binom{n-1}{p} = \frac{n-1}{p} \times \binom{n-2}{p-1}$ pour $1 \leq p \leq n-1$ (C 629c)

9) Vrai ou Faux ?... **Faux** (C 724b)
 $P \Rightarrow (P \text{ et } Q)$

10) f une bijection de E dans F Alors $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ (C 757c)

11) Limite particulière avec $x \rightarrow 0$ de la puissance $(\quad)^a, (a \neq 0)$ (C 804a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

12) $f'(0) = a \neq 0 \iff f(x) - f(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a.x$ (C 827a)

13) Tableau de variations complet de sh (C 907a)

x	-1	0	$+1$
$\arcsin x$			$+\pi/2$
		0	
	$-\pi/2$		

14) $\arctan x > 2\pi/3 \iff \text{IMPOSSIBLE}$ (C 925b)
car $\arctan x \in]-\pi/2, \pi/2[$

15) Définition : Soit f définie sur I et $a \in I$ (C 1017a)
 f admet un maximum global en $a \iff \forall x \in I, f(x) \leq f(a)$

16) $F(u) = \int^u \frac{dx}{x^2 - 4x + 8} = \int^u \frac{dx}{(x-2)^2 + 4}$ (C 1069c)

$$= \int^u \frac{dx}{(x-2)^2 + 2^2} = \int^u \frac{dx}{4 \left[\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 + 1 \right]} = \frac{2}{4} \int^u \frac{(1/2) dx}{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x-2}{2} \right) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

17) $F(x) = \int^x \frac{dt}{(-2t+3)^4} = \int^x (-2t+3)^{-4} dt$ (C 1071)

$$\text{Primitive du type } u^{-3} \text{ avec } [u^{-3}]' = -3u'.u^{-4}$$

$$F(x) = \int^x \frac{1}{6} (-3)(-2)(-2t+3)^{-4} dt = \frac{1}{6} (-2x+3)^{-3} = \frac{1}{6(-2x+3)^3}$$

sur $] -\infty; 3/2[$ ou $]3/2; +\infty[$

18) Vrai ou Faux ?... **Vrai** (E 1114b)
Soient $a < b$ et f une fonction continue sur le segment $[a, b]$

$$\text{Alors } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

- 19) Soit l'équation $y'' + y = e^{2x} \cos x$ (C 1142b)

Son équation caractéristique a pour racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$

Trouver une **solution particulière** y_p

$$y'' + y = \operatorname{Re}[e^{2x} e^{ix}] = \operatorname{Re}[e^{(2+i)x}] \quad \text{On cherche } \varphi(x) = C \cdot e^{(2+i)x}$$

$$\varphi'(x) = C \cdot (2+i) e^{(2+i)x}, \quad \varphi''(x) = C \cdot (2+i)^2 e^{(2+i)x} = C \cdot (3+4i) e^{(2+i)x}$$

$$y'' + y = e^{(2+i)x} \iff C[(3+4i) + 1] = 1 \iff C = \frac{1}{4(1+i)} = \frac{1-i}{8}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \operatorname{Re} \left[\frac{1-i}{8} (\cos x + i \sin x) e^{2x} \right] = \frac{1}{8} (\cos x + \sin x) e^{2x}$$

- 20) Définition : la suite (u_n) n'est pas majorée (C 1201b)

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$$

$$\boxed{\text{C'est la négation de : } (u_n) \text{ majorée} \iff (\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M)}$$

- 21) Vrai ou faux ? ... **Vrai** (C 1227b)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|$$

- 22) Forme générale du DL $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$ (C 1282b)

- 23) Formule de Taylor-Young en $a \in I$ à l'ordre n : (C 1297c)

Soit f une fonction de classe C^n sur I

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

- 24) Définition : Soit f définie sur I et $a \in I$ (C 1501a)

f est positive au voisinage de $a \iff$

il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in I, \quad x \in]a-r, a+r[\Rightarrow f(x) \geq 0$

- 25) Soit f décroissante sur $]a, b[$ avec $a < b, \quad (a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ (C 1515c)

Si f est minorée par m

alors f admet une limite finie en b

$$\text{tel que } \forall x \in]a, b[, \quad m \leq \lim_b f \leq f(x)$$

sinon $\lim_{b^-} f = -\infty$

- 26) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$ (C 1550a)

Justifier que f n'admet pas de limite (finie ou infinie) en $+\infty$

Posons $u_n = 2\pi n$ et $v_n = 2\pi n + \pi/2$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

D'autre part $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = 1$$

Donc f ne possède pas de limite en $+\infty$ (sinon on devrait avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n)$)

- 27) Soit A, B deux matrices carrées d'ordre n (C 1607)

Démontrer que AB est inversible $\Rightarrow A$ et B sont inversibles

Supposons AB inversible. Il existe donc une matrice C telle que $(AB)C = C(AB) = I$

Or $I = (AB)C = A(BC)$ et les matrices sont carrées donc A est inversible (d'inverse $A^{-1} = BC$)

De même $I = C(AB) = (CA)B$, matrices carrées. Donc B est inversible (d'inverse $B^{-1} = CA$)

- 28) **Binôme de Newton pour les matrices** (C 1630a)

Si A et B commutent ($AB = BA$) alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$