

1) Pour $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{1/n} = e^{\frac{1}{n}(\ln x)}$ (C 056)

2) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \pi/4}{1 - \tan x \tan \pi/4} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x}$ (C 126a)

3) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(\bar{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$ (C236)

4) Les racines cubiques de l'unité sont : (C 323d)

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = e^{i4\pi/3} = e^{-i2\pi/3} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5) $(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ (C 421b)

6) $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_j b_k = \left(\sum_{j=1}^n a_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^p b_k\right)$ (C 502a)

ne pas oublier les parenthèses, sinon cela n'a pas le même sens :

$$\sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^p b_k = \sum_{j=1}^n \left(a_j \sum_{k=1}^p b_k \right)$$

même si cela reste égal aux formules précédentes

7) pour $n < p$, $\sum_{j=0}^n x_j = \sum_{j=0}^p x_j - \sum_{j=n+1}^p x_j$ (C 537b)

8) Vrai ou Faux ?... **Faux** (C 556h)

$$a^6 + b^6 \text{ est factorisable par } a + b$$

Car l'expression ne s'annule pas quand on remplace b par $-a$:

$$a^6 + (-a)^6 = a^6 + a^6 \neq 0$$

9) Définition : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (C 600c)

$$[x] = y \iff \begin{cases} x = y + \alpha \text{ avec} \\ y \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0, 1[\end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{Z} \text{ et} \\ y \leq x < y + 1 \end{cases}$$

Ne pas oublier que $y \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, on ne peut pas utiliser la partie entière pour définir la partie entière. Cela n'aurait pas de sens.

10) $\frac{15!}{6! 8!} = \frac{15! \times 9}{6! (8! \times 9)} = 9 \frac{15!}{6! 9!} = 9 \times \binom{15}{6}$ (C 641a)

11) $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, x \notin A_i$ (C 740f)

C'est la négation de $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$

12) LP avec $\ln$ en 1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ (C 801c)

13) Vrai ou Faux ?... **VRAI** (C 825c)

$$(f \underset{a}{\sim} h \text{ et } g \underset{a}{\sim} h) \Rightarrow (f - g) = o(h) \text{ en } a$$

$$\frac{f(x)}{h(x)} \rightarrow 1 \text{ et } \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \rightarrow 0 \Rightarrow f - g = o(h)$$

14) Démontrer que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$ (C 843a)

$$\ln(1+x) = \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Quand } x \rightarrow +\infty, \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow 0 \quad \ln x \rightarrow +\infty$$

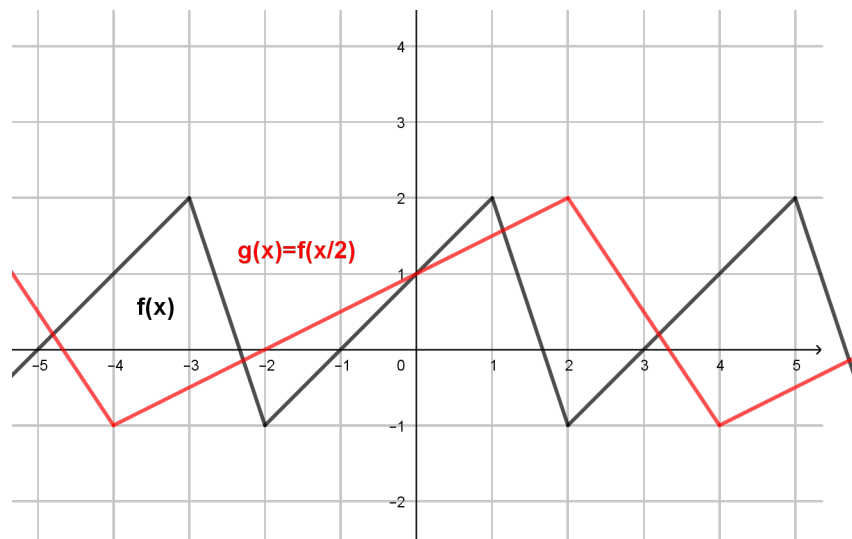
$$\text{Donc } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = o(\ln x) \Rightarrow \ln(1+x) \sim \ln x$$

15) Vrai ou Faux ?... **Vrai** (C 919b)

$$a = \arccos \frac{3}{5} \Rightarrow \cos a = \frac{3}{5}$$

- 16) On a tracé une partie du graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

Tracer le graphe de g définie par $g(x) = f(x/2)$ (C 1005g)



- 17) On donne le tableau de variations suivant :

(C 1034c)

x	1	$+\infty$
f	$+\infty$	-3

Justifier ce qu'on peut dire de l'équation $f(x) = 2$ sur $[1; +\infty[$

D'après le TV $f(2) = 3$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$

- f est continue et strictement décroissante sur $I =]1, +\infty[$
Donc f réalise une bijection de $I =]1, +\infty[$ sur $f(I) =]-3, +\infty[$
- Or $2 \in f(I)$
Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution x dans $]1, +\infty[$

Noter les intervalles ouverts car f n'est pas définie en 1

18) $\int^u \frac{x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int^u \frac{2x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+u^2)$ sur $\mathbb{R}$ (C 1076)

19) $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} \, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$ (C 1111a)

Déterminer le signe de f (Justifier!)

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = e^{-t^2} > 0$

- Pour $x \geq 0$, $x \leq 2x \Rightarrow f(x) = \int_x^{2x} g(t) \, dt \geq 0$
(Bornes dans le bon sens)
- Pour $x \leq 0$, $x \geq 2x \Rightarrow f(x) = \int_x^{2x} g(t) \, dt \leq 0$
(Bornes dans le mauvais sens)

20) L'équation $y' - \frac{2}{x} \cdot y = 0$ (E_0) (C 1134b)

a pour solutions $y_0(x) = Cx^2$ avec $C \in \mathbb{C}$

Déterminer les solutions de l'équation $y' - \frac{2}{x} \cdot y = 2x^3$ (E)

On cherche une solution particulière $y_P(x) = C(x)x^2$

$$\Rightarrow y'_P(x) = C'(x)x^2 + C(x)2x$$

$$(E) \iff C'(x)x^2 + C(x)2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = 2x^3$$

$$\iff C'(x)x^2 = 2x^3 \iff C'(x) = 2x \Rightarrow C(x) = x^2$$

$$\Rightarrow y_P(x) = y_P(x) = x^4 \Rightarrow y(x) = Ax^2 + x^4$$

- 21) Vrai ou Faux ? ... **Faux** (C 1205d)

La suite (u_n) est décroissante

$\iff$ La suite (u_n) est majorée par son premier terme

La réciproque est fausse

22) Soit (u_n) une suite et f une fonction. (C 1230a)

Si

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
- La suite u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
- f est continue en ℓ

Alors $f(\ell) = \ell$

23) La proposition suivante est **Fausse** (C 1246h)

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^n = 1$

Contre-exemple : $u_n = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ et $(u_n)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$

24) DL à l'ordre n (3 premiers et dernier termes) (C 1288b)

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

25) DL ordre 3 en 1 de $x \mapsto e^{2x}$ (C 1302)

$f(x) = e^{2x} = e^X$ avec $X = 2x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$

$$= 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + o(X^3)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

26) Définition : $a \in \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff$ (C 1502)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

27) Soit f croissante sur $]a, b[$ avec $a < b, (a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ (C 1516c)

Si f n'est pas minorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f = -\infty$

28) Vrai ou Faux?... **Vrai** (C 1552a)

La fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ pour $x > 0$

est prolongeable par continuité en 0

En effet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (limite finie)

29) Soient deux matrices P et Q inversibles tq $A = P^{-1}BQ$ (C 1615)

Alors $B = PAQ^{-1}$

30) Vrai ou Faux?... **Vrai** (C 1806c)

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$

Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$