

EXERCICE 1

On rappelle l'encadrement "classique" $2,7 < e < 2,8$, encadrement qui permet facilement d'obtenir les inégalités suivantes : $2 < e < 3 < e^2$, inégalités que l'on pourra utiliser sans démonstration.

On note f la fonction $x \mapsto 4 - \frac{1}{4} \ln(x)$ et I l'intervalle $[3; 4]$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a **au moins** une solution dans I .

Posons $g(x) = f(x) - x$

$$g(3) = 4 - \ln 3 - 3 = 1 - \frac{1}{4} \ln 3 \quad \text{avec } e < 3 < e^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} > -\frac{1}{4} \ln 3 > -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} > 1 - \frac{1}{4} \ln 3 > \frac{1}{2}$$

Donc $g(3) > 0$

$$g(4) = 4 - \ln 4 - 4 = -\ln 4 < 0$$

$g(3) > 0 > g(4)$ avec g continue sur $[3, 4]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $x_0 \in [3, 4]$ tel que $g(x_0) = 0$ c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$

2. f est de façon évidente dérivable sur I . Encadrer $f'(x)$ pour $x \in I$

$$f(x) = 4 - \frac{1}{4} \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-1}{4x}$$

$$\text{Pour } x \in [3, 4], \quad 3 \leq x \leq 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3} \quad \text{car tout est positif}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{12} \leq \frac{-1}{4x} \leq \frac{-1}{16} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{-1}{12} \leq f'(x) \leq \frac{-1}{16}$$

3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une **unique** solution dans I .

$$\forall x \in [3, 4], \quad f'(x) = \frac{-1}{4x} < 0 \quad \Rightarrow \quad g'(x) < f'(x) < -1$$

Donc g est donc strictement décroissante sur $[3, 4]$ donc l'équation de $g(x) = 0$ admet x_0 pour une unique solution.

Pour la suite on note s cette solution

4. Montrer que : $\forall (a, b) \in I^2 \quad |f(b) - f(a)| \leq K |b - a|$ où K est une constante élément de $]0; 1[$ que l'on précisera.

$$\forall x \in [3, 4], \quad \frac{-1}{12} \leq f'(x) \leq \frac{-1}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{12} \leq f'(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{12}$$

De plus f est continue et dérivable sur I

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad |f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{12} |a - b|$$

5. Soit U la suite définie par : $U_0 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f(U_n)$

- (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_{n+1} - s| \leq K |U_n - s|$

Pour utiliser la propriété précédente, il faut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

Par récurrence :

- Initialisation : $n = 0$

$$U_0 = 3 \in I \quad \text{Vrai pour } n = 0$$

- Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ donné
Or $U_n, s) \in I^2$, donc d'après la question précédente

$$\Rightarrow \quad f(4) \leq f(U_n) \leq f(3) \quad \text{car } f \text{ décroissante}$$

$$\Rightarrow \quad U_{n+1} \in [f(4), f(3)]$$

Mq $f(4) \geq 3$:

$$f(4) - 3 = 4 - \frac{1}{4} \ln(4) - 3 = 1 - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\text{Or } 2 < e \Rightarrow \ln 2 < 1 \Rightarrow \frac{-1}{2} \ln 2 > \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{2} \ln 2 > \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \quad f(4) > 3$$

D'autre part

$$f(3) - 4 = 3 - \frac{1}{4} \ln(3) - 4 = -1 - \frac{1}{4} \ln(3) < 0$$

$$\text{Donc } 3 < f(4) \text{ et } f(3) < 4 \text{ avec } U_{n+1} \in [f(4), f(3)]$$

$$\Rightarrow \quad U_{n+1} \in [3, 4]$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$ et $s \in I$

Donc on peut remplacer (x, y) par (U_n, s)

en utilisant la question 4.b), on obtient :

$$|f(U_n) - f(s)| \leq |U_n - s|$$

$$\iff |U_{n+1} - s| \leq K|U_n - s| \quad \text{car } f(s) = s$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n - s| \leq K^n$

Montrons-le par Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

• Initialisation : $n = 0$

$$U_0 = 3 \text{ et } s \in [3, 4]$$

$$\Rightarrow 3 \leq s \leq 4 \Rightarrow 0 \leq s - U_0 \leq 1 \Rightarrow |s - U_0| \leq 1 = K^0 \Rightarrow |s - U_0| \leq K^0$$

Vrai pour $n = 0$

• Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ donné

$$\text{On a } |U_n - s| \leq K^n$$

$$\Rightarrow K|U_n - s| \leq K^{n+1} \quad \text{car } K \geq 0$$

$$\text{Or } |U_{n+1} - s| \leq K|U_n - s| \quad \text{d'après 5)a)}$$

$$\Rightarrow |U_{n+1} - s| \leq K^{n+1}$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - s| \leq K^n$

(c) Qu'en déduit-on concernant la suite U ?

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |U_n - s| \leq K^n$$

$$\text{Or } 0 \leq K < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} K^n = 0$$

$$\text{Donc par encadrement } \lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - s| = 0 \iff$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = s$$

EXERCICE 2

1. Calculer pour x réel $\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ en posant $u = 1 + t^2$

$$u = 1 + t^2 \quad du = 2t dt \quad \text{Bornes : } \begin{cases} t = x & u = 1 + x^2 \\ t = 0 & u = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2} t dt = \int_1^{1+x^2} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{-1}{2} \int_1^{1+x^2} \frac{-1}{u^2} du \\ &= \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{u} \right]_1^{1+x^2} = \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{1+x^2} - 1 \right] \end{aligned}$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+x^2)^2 y' + 2xy = x e^{\frac{1}{1+x^2}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \neq 0$ Donc

$$(E) \iff (1+x^2)^2 y' + 2xy = x e^{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\iff y' + \frac{2x}{(1+x^2)^2} y = \frac{x e^{\frac{1}{1+x^2}}}{(1+x^2)^2}$$

• EHA : $(E_0) \quad y' + \frac{2x}{(1+x^2)^2} y = 0 \iff y' + a(x) y = 0$

$$\text{Avec } a(x) = 2 \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

D'après la question précédente, une primitive de a est

$$A(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\text{D'où } y_0(x) = K e^{-A(x)} = K \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

• Solution particulière

$$\text{On cherche une solution du type } y_P(x) = C(x) \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$y'_P(x) = C'(x) \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + C(x) \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

D'où

(E)

$$\Leftrightarrow C'(x) \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + C(x) \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} C(x) \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{x e^{\frac{1}{1+x^2}}}{(1+x^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow C'(x) \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{x e^{\frac{1}{1+x^2}}}{(1+x^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow C'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

Donc $C(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)}$ convient

$$y_p(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)} \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

• Solution générale

$$y_G(x) = K \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{-1}{2(1+x^2)} \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \left[K - \frac{1}{2(1+x^2)}\right] \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 3

On admet que les conditions

$$a_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}}{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}$$

définissent bien une suite a à termes strictement positifs, et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 2^n \ln(a_n)$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = -\sum_{k=1}^n 2^k \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\ln(a_{n+1}) = \ln\left(\frac{\sqrt{a_n}}{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}\right) = \ln(\sqrt{a_n}) - \ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(a_n) - \ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

D'où

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2^{n+1} \ln(a_{n+1}) \\ &= 2^n \ln(a_n) - 2^{n+1} \ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= b_n - 2^{n+1} \ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_{n+1} - b_n = -2^{n+1} \ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

D'où, en remplaçant n par $k-1$, pour $k \geq 1$

$$-2^k \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = b_k - b_{k-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^n -2^k \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) &= \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) = b_n - b_0 \quad (\text{par télescopage}) \\ &= b_n \quad \text{car} \quad b_0 = 2^0 \ln(a_0) = 0 \end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = -\sum_{k=1}^n 2^k \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$

2. Montrer que $\forall x \in [0; \frac{1}{2}] \quad x \leq -\ln(1-x) \leq x + x^2$

Posons $g(x) = x + \ln(1-x)$ et $h(x) = x + x^2 + \ln(1-x)$ pour $x \in [0, 1/2]$

g et h sont définies dérivables sur $[0; 1/2]$

• $g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} \frac{-x}{1-x} < 0$ pour $0 \leq x \leq 1/2$

Sur $[0, 1/2]$, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante

et comme $g(0) = 0$ on a

$$\forall x \in [0, 1/2], g(x) \leq 0 \quad \text{et donc} \quad x \leq -\ln(1-x)$$

• $\forall x \in [0, 1/2],$

$$h'(x) = 1 + 2x - \frac{1}{1-x} = \frac{(1+2x)(1-x) - 1}{1-x}$$

$$= \frac{1-x+2x-2x^2-1}{1-x} = \frac{x-2x^2}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{1-x}$$

Sur $[0, 1/2]$, $1-2x \geq 0$, $x \geq 0$, $1-x \geq 0$

Donc $h'(x) \geq 0$ et h est croissante. Or $h(0) = 0$

D'où $h(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 + x \geq -\ln(1-x)$, $\forall x \in [0, 1/2]$

Les deux inégalités sont donc vérifiées

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \leq b_n \leq n+1 - \frac{1}{2^n}$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

• Initialisation : pour $n = 0$, $b_0 = 0$, $n+1 - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$

L'inégalité est vérifiée au rang $n = 0$

• Hérédité : supposons l'encadrement vrai à un rang $n \geq 0$ donné

On a $n \leq b_n \leq n+1 - \frac{1}{2^n}$ (1)

D'après le calcul de la question 1), on a

$$b_{n+1} = b_n - 2^{n+1} \ln \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

On a $2^{n+1} \geq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2}$

On peut donc remplacer x par $\frac{1}{2^{n+1}}$ dans l'encadrement du 2)

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq -\ln \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right)^2$$

$$\Rightarrow 1 \leq -2^{n+1} \ln \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \leq 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \quad (2)$$

En additionnant (1)+(2) :

$$n+1 \leq b_n - 2^{n+1} \ln \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \leq M_n$$

$$\Leftrightarrow n+1 \leq b_{n+1} \ln \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \leq M_n \text{ avec}$$

$$M_n = \left(n+1 - \frac{1}{2^n} \right) + \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) = n+2 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= n+2 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

L'encadrement est donc vrai au rang $n+1$

• Conclusion : l'encadrement vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$

4. En déduire grâce à un encadrement de a_n que a converge et donner sa limite L

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a $n \leq b_n \leq n+1 - \frac{1}{2^n}$

$$\Leftrightarrow n \leq 2^n \ln(a_n) \leq n+1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} \leq \ln(a_n) \leq \frac{n+1 - \frac{1}{2^n}}{2^n} \quad \text{car } 2^n > 0$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, $\frac{n}{2^n} \rightarrow 0$ (Croissance comparée)

Et $\frac{n+1 - 1/2^n}{2^n} = \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \rightarrow 0$

La suite $(\ln a_n)$ est encadrée par deux suites qui tendent vers 0

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a_n) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e^0 = 1$ par continuité de la fonction $\exp$

5. Déterminer un équivalent simple de $a_n - L$

On sait que $\exp(X) - 1 \sim X$ quand $X \rightarrow 0$

Or $X = \frac{n}{2^n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$

On a donc $u_n = \exp \frac{n}{2^n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2^n}$

et $v_n = \exp \left(\frac{n+1 - 1/2^n}{2^n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n+1 - 1/2^n}{2^n}$

Or $n \rightarrow +\infty$ et $1 - 1/2^n \rightarrow 1 \Rightarrow 1 - 1/2^n = o(n)$

$\Rightarrow n+1 - 1/2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \Rightarrow v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2^n}$

Or $u_n \leq a_n - 1 \leq v_n$

$\Rightarrow \frac{u_n}{n/2^n} \leq \frac{a_n - 1}{n/2^n} \leq \frac{v_n}{n/2^n}$ pour $n \geq 1$ car $n/2^n > 0$

D'après les équivalents précédents $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n/2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n/2^n} = 1$

Donc, par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - 1}{n/2^n} = 1 \Rightarrow a_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2^n}$

PROBLEME

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$ $J_n = (n+1)I_n I_{n+1}$
 et $K_n = I_{2n}$

1. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(x) dx - \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(x) - \cos^n(x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)(\cos(x) - 1) dx \end{aligned}$$

Or, pour $x \in [0, \pi/2]$, $\cos^n(x) \geq 0$ et $\cos(x) - 1 \leq 0$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)(1 - \cos(x)) dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \leq I_n$$

Donc la suite (I_n) est décroissante

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(x) \cos(x) dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = \cos^{n+1}(x) & u'(x) = -(n+1) \cos^n(x) \sin(x) \\ v(x) = \cos x & v'(x) = -\sin x \end{cases}$$

avec $u, v \in C^1$ sur $[0, \pi/2]$

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [\cos^{n+1}(x) \sin x]_0^{\pi/2} \\ &\quad - \int_0^{\pi/2} -(n+1) \cos^n(x) \sin(x) \sin(x) dx \\ &= [\cos^{n+1}(\pi/2) \sin(\pi/2) - \cos^{n+1}(0) \sin(0)] \\ &\quad + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) \sin^2(x) dx \end{aligned}$$

$$= [0 - 0] + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) (1 - \cos^2(x)) dx$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n + I_{n+2})$$

$$\Rightarrow (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

3. Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et calculer J_n pour $n \in \mathbb{N}$

$$J_n = (n+1)I_n I_{n+1}$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = (n+2)I_{n+1} I_{n+2}$$

$$= (n+2)I_{n+1} \frac{n+1}{n+2} I_n$$

$$= (n+1)I_{n+1} I_n$$

$$\Rightarrow J_{n+1} = J_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donc la suite (J_n) est constante

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}, J_n = J_0 = (0+1)I_0 I_1$$

$$\text{avec } I_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(x) dx = \int_0^{\pi/2} 1. dx = \pi/2$$

$$\text{et } I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^1(x) dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, J_n = \frac{\pi}{2}$$

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$ (on commencera par prouver que $I_n \geq 0$)

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) \cos(x) \, dx$$

Or, sur $[0, \pi/2]$, $\cos x \geq 0 \Rightarrow \cos^n(x) \geq 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) \cos(x) \, dx \geq 0 \quad \text{car } 0 < 1 \text{ (BBS)}$$

$$\Rightarrow I_n \geq 0$$

D'autre part :

$$J_n = (n+1)I_n I_{n+1} = \pi/2 \Rightarrow (n+1)I_n I_{n+1} \neq 0$$

$$\Rightarrow I_n \neq 0$$

Donc $I_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$

5. Utiliser notamment la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ montrer pour $n \in \mathbb{N}$, que $\frac{n}{2n+1} J_{2n} \leq nK_n^2$ et $\frac{1}{2} J_{2n+1} \geq nK_n^2$

$$K_n = I_{2n} \quad \text{et} \quad J_n = (n+1)I_n I_{n+1} \Rightarrow J_{2n} = (2n+1)I_{2n} I_{2n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Par équivalences : il faut donc montrer

$$\frac{n}{2n+1} (2n+1) I_{2n} I_{2n+1} \leq n I_{2n}^2$$

$$\iff n I_{2n} I_{2n+1} \leq n I_{2n}^2$$

$$\iff I_{2n+1} \leq I_{2n} \quad \text{car} \quad n I_{2n} > 0 \text{ pour } n > 0$$

Ce qui est vrai car (I_n) est décroissante

Pour $n = 0$, l'inégalité est triviale

Donc la première inégalité est vérifiée

$$\text{Montrons l'autre inégalité : } \frac{1}{2} J_{2n+1} \geq n K_n^2$$

Pour $n \in \mathbb{N}$

$$n K_n^2 = n I_{2n} I_{2n}$$

Or (I_n) est décroissante donc, pour $n \geq 1$

$$I_{2n} \leq I_{2n-1}$$

$$\Rightarrow n I_{2n}^2 \leq n I_{2n-1} I_{2n} \quad \text{car} \quad n I_{2n} > 0$$

$$\Rightarrow n I_{2n}^2 \leq \frac{1}{2} (2n I_{2n-1} I_{2n})$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, J_n = (n+1) I_n I_{n+1} \Rightarrow J_{2n-1} = 2n I_{2n-1} I_{2n}$$

$$\Rightarrow n I_{2n}^2 \leq \frac{1}{2} J_{2n-1}$$

$$\text{Or } (J_n) \text{ est constante donc } J_{2n-1} = J_{2n+1}$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} J_{2n+1} \geq n K_n^2 \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$\text{Pour } n = 0 \quad \frac{1}{2} J_{2n+1} = \frac{1}{2} J_1 = \frac{\pi}{4} \text{ et } n K_n = 0$$

L'inégalité est également vérifiée

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} J_{2n+1} \leq \frac{n}{2n+1} J_{2n} \leq n K_n^2$$

Remarque : autre démo pour la deuxième inégalité.

La deuxième inégalité donne, par équivalences :

$$\frac{1}{2} J_{2n+1} \geq n K_n^2$$

$$\iff \frac{1}{2} (2n+2) I_{2n+1} I_{2n+2} \geq n I_{2n}^2$$

$$\iff \frac{1}{2} (2n+2) I_{2n+1} \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} \geq n I_{2n}^2 \quad \text{en remplaçant } n \text{ par } 2n \text{ dans 2)}$$

$$\iff \frac{1}{2} (2n+1) I_{2n+1} I_{2n} \geq n I_{2n}^2$$

$$\iff (n + \frac{1}{2}) I_{2n+1} \geq n I_{2n} \quad \text{car } I_{2n} > 0$$

$$\iff n(I_{2n+1} - I_{2n}) + \frac{1}{2} I_{2n+1} \geq 0$$

$$\iff (2n+1) I_{2n+1} \geq (2n) I_{2n}$$

Il reste à montrer que la suite $(k I_k)$ est croissante c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, (k+1) I_{k+1} \geq k I_k \quad \text{par récurrence sur } k$$

• Vrai pour $k = 0$

• supposons la relation vraie à un rang k donné

$$(k+2) I_{k+2} = (k+2) \frac{k+1}{k+2} I_k = (k+1) I_k \geq (k+1) I_{k+1}$$

Car la suite (I_n) est décroissante

Vrai au rang $k+1$

Donc, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+1)I_{k+1} \geq kI_k$

D'où $(2n+1)I_{2n+1} \geq (2n)I_{2n}$

La deuxième inégalité est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$

6. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nK_n^2$

D'après les inégalités précédentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n}{2n+1} J_{2n} \leq nK_n^2 \leq \frac{1}{2} J_{2n+1}$$

$$\text{Or } \frac{n}{2n+1} J_{2n} = \frac{n}{2n+1} \frac{\pi}{2} \sim \frac{n}{2n} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{et } \frac{1}{2} J_{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Donc par encadrement (nK_n^2) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nK_n^2 = \frac{\pi}{4}$

7. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad K_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$

• Initialisation : Pour $n=0$:

$$K_0 = I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{4^0 (0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ Vrai pour } n=0$$

• Hérédité : supposons la relation vraie à un rang n donné

$$\text{On a } K_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= I_{2n+2} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} \quad \text{d'après I. 2)} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad (\text{H.R}) \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2} \cdot \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{4(n+1)^2} \cdot \frac{(2n+2)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Relation vraie au rang $n+1$

• Conclusion : La relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Partie II

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^n}$,
la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \ln(U_{n+1}) - \ln(U_n)$ et
la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 pour $f(x)$

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$$

$$\frac{2x}{2+x} = \frac{2x}{2(1+x/2)} = x \frac{1}{1+x/2}$$

$$\frac{1}{1+x/2} = \frac{1}{1+X}$$

$$= 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)$$

avec $X = x/2 \rightarrow 0$ qd $x \rightarrow 0$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow -\frac{2x}{2+x} = -x \frac{1}{1+x/2}$$

$$= -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

$$\text{Or } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow f(x) = (1/3 - 1/4)x^3 + o(x^3) = \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ simplifier $\frac{U_{n+1}}{U_n}$
et vérifier que : $a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)! e^{n+1}}}{\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^n}} = \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{n! e^n}{(n+1)! e^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(n+1)e} \\ &= \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{e} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \ln(U_{n+1}) - \ln(U_n) = \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}&\left(n + \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{2/n}{2 + 1/n}\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2}{2n+1} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right)\end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée

3. En déduire l'existence d'une constante C strictement positive telle que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{n^2}$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{12}x^3$$

$$\text{Quand } n \rightarrow +\infty, \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12} \frac{1}{n^3}$$

$$\text{et } \left(n + \frac{1}{2}\right) \sim n$$

$$\Rightarrow a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1/12}{n^2}$$

On admet que dans ces conditions la suite $(A_n)_{n \geq 2}$ définie par $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ converge.

4. Simplifier A_n pour $n \geq 2$ et en déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $L > 0$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(U_{k+1}) - \ln(U_k)) = \ln(U_n) - \ln(U_1) \quad \text{par télescope}$$

$$\text{avec } u_1 = \frac{1^{3/2}}{1!e^1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \ln(U_1) = -1$$

$$\text{Donc } A_n = \ln(U_n) + 1 \Rightarrow \ln(U_n) = A_n - 1 \Rightarrow U_n = e^{A_n - 1}$$

Notons ℓ la limite de (A_n)

Alors, par continuité de la fonction $\exp$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L \quad \text{avec} \quad L = e^{\ell - 1}$$

Partie III

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad nK_n^2 = \frac{\pi^2}{2} \frac{U_n^4}{U_{2n}^2}$

$$\text{D'après I.7.} \quad K_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow nK_n^2 = n \frac{((2n)!)^2}{(4^n)^2 (n!)^4} \frac{\pi^2}{4} = n\pi^2 \frac{((2n)!)^2}{4^{2n+1} (n!)^4}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^2}{2} \frac{U_n^4}{U_{2n}^2} &= \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^n} \right)^4}{\left(\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)! e^{2n}} \right)^2} \\
 &= \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^n} \right)^4 \cdot \left(\frac{(2n)! e^{2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}} \right)^2 \\
 &= \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{n^{4n+2}}{(n!)^4 e^{4n}} \cdot \frac{((2n)!)^2 e^{4n}}{(2n)^{4n+1}} \\
 &= \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{((2n)!)^2}{(n!)^4} \cdot \frac{n^{4n+2}}{2^{4n+1} n^{4n+1}} \\
 &= \pi^2 \cdot \frac{((2n)!)^2}{(n!)^4} \cdot \frac{n}{2^{4n+2}} \\
 &= n\pi^2 \frac{((2n)!)^2}{(n!)^4} \cdot \frac{1}{4^{2n+1}}
 \end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée

2. En déduire une nouvelle expression de $\lim_{n \rightarrow +\infty} nK_n^2$ en fonction de L .

Quand $n \rightarrow +\infty$, $U_n \rightarrow L$ d'où $U_{2n} \rightarrow L \Rightarrow \frac{\pi^2}{2} \frac{U_n^4}{U_{2n}^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{2} \frac{L^4}{L^2} = \frac{\pi^2 L^2}{2}$

Donc la suite (nK_n^2) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nK_n^2 = \frac{\pi^2 L^2}{2}$

3. Montrer que $L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

On a vu en I.6 que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nK_n^2 = \frac{\pi}{4}$

Donc par unicité de la limite :

$$\frac{\pi^2 L^2}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow L^2 = \frac{1}{2\pi}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |L| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{avec} \quad L = e^{\ell-1} > 0 \\
 \Rightarrow L &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
 \end{aligned}$$