

L'énoncé comporte 3 exercices et un problème, problème que l'on rédigera sur une copie séparée. La clarté et la précision de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation, et la présentation générale sera également prise en compte. Les objets électroniques sont strictement interdits, et l'usage du correcteur est à limiter au maximum.

EXERCICE 1

On rappelle l'encadrement "classique" $2,7 < e < 2,8$, encadrement qui permet facilement d'obtenir les inégalités suivantes : $2 < e < 3 < e^2$, inégalités que l'on pourra utiliser sans démonstration.

On note f la fonction $x \mapsto 4 - \frac{1}{4} \ln(x)$ et I l'intervalle $[3; 4]$

- Montrer que l'équation $f(x) = x$ a **au moins** une solution dans I .
- f est de façon évidente dérivable sur I . Encadrer $f'(x)$ pour $x \in I$.
- Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une **unique** solution dans I .
Pour la suite on note s cette solution.
- Montrer que : $\forall (a, b) \in I^2 \quad |f(b) - f(a)| \leq K |b - a|$
où K est une constante élément de $]0; 1[$ que l'on précisera.
- Soit U la suite définie par : $U_0 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f(U_n)$
 - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_{n+1} - s| \leq K |U_n - s|$
 - En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n - s| \leq K^n$
 - Qu'en déduit-on concernant la suite U ?

EXERCICE 2

- Calculer pour x réel $\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ en posant $u = 1 + t^2$

- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(1+x^2)^2 y' + 2xy = x e^{\frac{1}{1+x^2}}$

EXERCICE 3

On admet que les conditions

$$a_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}}{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}$$

définissent bien une suite a à termes strictement positifs, et on pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = 2^n \ln(a_n)$

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = - \sum_{k=1}^n 2^k \ln \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)$
- Montrer que $\forall x \in [0; \frac{1}{2}] \quad x \leq -\ln(1-x) \leq x + x^2$
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \leq b_n \leq n + 1 - \frac{1}{2^n}$
- En déduire grâce à un encadrement de a_n que a converge et donner sa limite L
- Déterminer un équivalent simple de $a_n - L$

PROBLEME

NB : **Utiliser une nouvelle copie** . Cette partie de l'épreuve ne sera pas corrigée (note=0) si elle est rédigée même partiellement sur une copie déjà utilisée pour un exercice.

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$$

$$J_n = (n+1)I_n I_{n+1}$$

et

$$K_n = I_{2n}$$

1. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$
3. Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et calculer J_n pour $n \in \mathbb{N}$
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n > 0$ (on commencera par prouver que $I_n \geq 0$)
5. Utiliser notamment la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ montrer pour $n \in \mathbb{N}$,
que $\frac{n}{2n+1} J_{2n} \leq n K_n^2$ et $\frac{1}{2} J_{2n+1} \geq n K_n^2$
6. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n K_n^2$
7. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad K_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$

Partie II

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n! e^n}$$

, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \ln(U_{n+1}) - \ln(U_n)$$

et la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$$

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 pour $f(x)$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ simplifier $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et vérifier que : $a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{n}\right)$
3. En déduire l'existence d'une constante C strictement positive telle que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{n^2}$

On admet que dans ces conditions la suite $(A_n)_{n \geq 2}$ définie par $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ converge.

4. Simplifier A_n pour $n \geq 2$ et en déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $L > 0$

Partie III

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n K_n^2 = \frac{\pi^2}{2} \frac{U_n^4}{U_{2n}^2}$
2. En déduire une nouvelle expression de $\lim_{n \rightarrow +\infty} n K_n^2$ en fonction de L .
3. Montrer que $L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$