

1 Dérivation

1.1 Définitions

Définition 1 : Rapport de Newton

On note $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ le rapport de Newton, ou taux d'accroissement, de f en a .
C'est aussi le coefficient directeur de la droite (AM) avec $A(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$.

Définition 2 : Dérivée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
 f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existe et est finie.}$$

Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ cette limite.

Définition 3 : Dérivée à gauche, à droite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.
 f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0})$$

existe et est finie.

Dans ce cas, on note cette limite $f'_d(x_0)$ resp. $f'_g(x_0)$.

Exemple : $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0.

Propriété 1 : continuité et dérivabilité

Soit f une fonction dérivable en x_0 .
Alors f est continue en x_0 .

Démonstration

On a : $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + o(h)$

Quand $h \rightarrow 0$, $o(h) \rightarrow 0$, donc $f(x_0 + h) \rightarrow f(x_0)$.

f est bien continue en x_0 .

Propriété 2 : Dérivée et équivalence

Soit f une fonction admettant une dérivée **non nulle** $f'(x_0)$ en x_0 .
Alors $f(x) - f(x_0) \sim_{x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
ou encore : $f(x_0 + h) - f(x_0) \sim_{h \rightarrow 0} f'(x_0) \cdot h$

Démonstration

f dérivable en x_0

$$\iff f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\iff f(x) - f(x_0) \sim_{x_0} f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{car} \quad f'(x_0) \neq 0$$

Exemple

$f : x \mapsto x^n$ est dérivable en 1 et $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$$\Rightarrow f'(1) = n$$

$$\Rightarrow f(1+h) - 1 \sim f'(1) \cdot h \sim n \cdot h.$$

$$\Rightarrow (1+h)^n - 1 \sim n \cdot h \quad \text{en} \quad 0$$

Propriété 3 formules de calculs

$$(a \cdot f + bg)' = a \cdot f' + b \cdot g'$$

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

$$(f^n)' = n f^{n-1} \cdot f'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \times g'$$

Définition 4 : Dérivée sur un intervalle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .

La fonction qui à tout point de I associe le nombre dérivé de f en ce point est appelée la fonction dérivée de f et est notée f' .

Propriété 4 Dérivée et tangente

- Si f est dérivable en a alors C_f admet une tangente en a de coefficient directeur $f'(a)$ et d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors C_f admet une tangente verticale en a

Propriété 5 : dérivée de la réciproque

Soit f une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle I , alors f admet une réciproque f^{-1} de $f(I)$ sur I et :

Pour tout point y de $f(I)$,

Si f est dérivable en $x = f^{-1}(y)$ et si $f'(x) \neq 0$,

alors f^{-1} est dérivable en y

$$\text{et } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$$

2 Accroissements finis**Définition 5 : Extremum global**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ f admet un maximum (resp. minimum) global en $a \in I$ si et seulement si

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } \forall x \in I, f(x) \geq f(a))$$

Définition 6 : Extremum local

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ f admet un maximum (resp. minimum) local en $a \in I$ ssi

$$\exists r > 0, \forall x \in I, |x - a| < r \Rightarrow f(x) \leq f(a) \\ (\text{resp. } f(x) \geq f(a))$$

Propriété 6 : Dérivée et extremum

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ admettant un extremum local en $x_0 \in]a, b[$ (intervalle ouvert) et dérivable en x_0 .

Alors $f'(x_0) = 0$

Démonstration

Si f admet en x_0 un maximum local

Alors il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$

f étant dérivable en x_0 , on a :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} +$$

- Si $x > x_0, x - x_0 > 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$$

- Si $x < x_0, x - x_0 < 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

- Conclusion : on a donc $f'(x_0) = 0$

Pour f admettant un minimum, il suffit de remplacer f par $-f$

Propriété 7 : Théorème de Rolle

Soit f une fonction

- continue sur $[a, b]$
- dérivable sur $]a, b[$
- telle que : $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Attention : Dans ces propriétés, soyez attentifs aux différents intervalles :

- Continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$
- Dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$

Cela dit, si une fonction f telle que $f(a) = f(b)$ est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$, a fortiori elle vérifie les hypothèses du théorème.

Démonstration

f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes.

C'est-à-dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ tels que

$$f(\alpha) = m = \min_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad f(\beta) = M = \max_{[a,b]} f.$$

- 1^{er} cas : si $m = M = f(a)$
Alors : $\forall x \in [a, b], f(x) = f(a)$ f est constante
Donc $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$.
- 2^{ème} cas : Supposons maintenant : $M \neq f(a) \Rightarrow M > f(a)$
Alors f atteint M en un point c qui n'est ni a ni b .
Donc f est dérivable en ce point et comme c'est un extremum de f , sa dérivée y est nulle.
- 3^{ème} cas : Si $m \neq f(a)$.
Il suffit de remplacer f par $-f$ et on se retrouve dans le deuxième cas.

Propriété 8 : Égalité des accroissements finis

Soit f une fonction

- continue sur $[a, b]$ (fermé)
- et dérivable sur $]a, b[$ (ouvert)

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Cela veut qu'il existe un point dont la tangente est parallèle à la droite (AB) c'est-à-dire qu'elles ont même pente (ou coefficient directeur)

Démonstration

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

Posons $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

On a de plus : $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$

D'après le théorème de Rolle,

il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$

$$\text{Or : } g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Propriété 9 : Inégalité des accroissements finis sur $[a, b]$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

- continue sur $[a, b]$
- dérivable sur $]a, b[$.
- telle que $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$

Alors $\forall (x, y) \in [a, b]^2$ tel que $x \neq y$, $m \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M$

Démonstration

Pour $x < y$ On a $[x, y] \subset [a, b]$

on a f continue sur $[a, b]$ donc continue sur $[x, y]$,

f dérivable sur $]a, b[$ donc sur $]x, y[$,

Donc d'après l'EAF, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

Or $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(c) \leq M$ d'où $m \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M$

Si $y < x$, il suffit d'échanger les notations x et y

Remarques

A) Le théorème s'applique évidemment au cas $x = a$ et $y = b$, ce qui donne :

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

B) L'inégalité $m \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M$ permet d'encadrer $f(y) - f(x)$

Mais alors il faut faire attention au signe de $y - x$:

- Si $x < y$, alors $m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x)$
car $y - x > 0$

- Si $x > y$, alors $M(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq m(y - x)$
car $y - x < 0$

C) Le théorème tient encore quand on a l'une des deux inégalité :

$$m \leq f'(x) \quad \text{donne} \quad m \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$f'(x) \leq M \quad \text{donne} \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M$$

Propriété 10 : IAF avec valeur absolue

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } f \text{ une fonction} \\ \bullet \text{ continue sur } [a, b] \quad (\text{avec } a < b) \\ \bullet \text{ dérivable sur }]a, b[\text{ telle que :} \\ \bullet \forall x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leq K \\ \text{Alors} \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq K|y - x| \end{array} \right.$$

Démonstration

Si $x = y$, l'inégalité est triviale

Si $x \neq y$.

Pour tout $x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leq K \Rightarrow -K \leq f'(x) \leq +K$

Donc d'après l'IAF :

$$-K \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq K \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq K$$

$$\Rightarrow \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq K$$

$$\Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq K|x - y| \quad \text{car } |y - x| > 0$$

Exemple

Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M < 1$
 De plus f admet un point fixe $a \in I$
 Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et tq $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
 Montrer alors que la suite (u_n) converge vers a

3 Applications

3.1 Fonctions monotones

Propriété 11 : Fonction constante

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } f \text{ une fonction continue sur } [a, b] \text{ (avec } a < b) \text{ et dérivable sur }]a, b[. \text{ Alors} \\ f \text{ est constante sur } [a, b] \\ \text{si et seulement si : } \forall x \in]a, b[, \quad f'(x) = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Évident

$\Leftarrow$ Supposons : $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$

$$\text{Alors : } \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq 0 \cdot |y - x| \Rightarrow f(x) = f(y)$$

Propriété 12 : Fonction monotone

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } f \text{ une fonction continue sur } [a, b] \text{ et dérivable sur }]a, b[. \\ \text{Alors } f \text{ est croissante (resp. décroissante) sur } [a, b] \\ \text{si et seulement si :} \\ \forall x \in]a, b[, \quad f'(x) \geq 0 \quad (\text{resp. } f'(x) \leq 0). \end{array} \right.$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Supposons f croissante sur $[a, b]$

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

$$x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Dans tous les cas, le rapport de Newton est positif, donc sa limite l'est aussi.

Donc $f'(x) \geq 0$

$\Leftarrow$ On suppose : $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$

Soit $x < y$. D'après l'IAF, on a :

$$f(y) - f(x) \geq 0 \cdot (y - x) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

f est donc croissante.

Propriété 13 : fonction strictement monotone

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
 Si $f' > 0$ sur $]a, b[$ (resp. $f'(x) < 0$ sur $]a, b[$).
 alors f est **strictement** croissante (resp. **strictement** décroissante) sur $[a, b]$

Attention : il n'y a plus équivalence.

Par exemple $f(x) = x^3$ qui est strictement croissante mais $f'(x) = 3x^2$ n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$

Démonstration

Soit $(x, y) \in [a, b]^2$ tel que $x < y$

D'après l'EAF, il existe $c \in]x, y[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$\Rightarrow f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$$

$$\text{Or } c \in]x, y[\Rightarrow c \in]a, b[\Rightarrow f'(c) > 0$$

$$\text{et } x < y \Rightarrow y - x > 0$$

$$\text{Donc } (y - x)f'(c) > 0$$

$$\Rightarrow f(y) > f(x)$$

Donc f est donc strictement croissante sur $[a, b]$

Propriété 14 : fonction strictement monotone (2)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
 Si $f' > 0$ sur $]a, b[$ (resp. $f'(x) < 0$ sur $]a, b[$)
sauf éventuellement en un nombre fini de points alors f est
strictement croissante (resp. **strictement** décroissante) sur $[a, b]$

Démonstration Cela se démontrerait sans peine par récurrence sur le nombre fini de points.

Montrons le cas où il n'existe qu'un point problématique $c \in]a, b[$

f est continue sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et $f' > 0$ sur $]a, c[$ et sur $]c, b[$

Donc f est strictement croissante sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$

Soient x, y deux réels de $[a, b]$ tels que $x < y$. Montrons que $f(x) < f(y)$

- 1er cas : x et y appartiennent à un même intervalle $[a, c]$ ou $[c, b]$
 Or f est strictement croissante sur cet intervalle donc $f(x) < f(y)$
- 2eme cas : x et y appartiennent à deux intervalles distincts : $x \in [a, c[$ et $y \in]c, b]$. Or f est strictement croissante sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ donc
 $f(x) < f(c)$ et $f(c) < f(y) \Rightarrow f(x) < f(y)$

Dans tous les cas, on a bien $f(x) < f(y)$

Donc f est strictement croissante sur $[a, b]$

Propriété 15 : Extremum local

Soit f définie et dérivable sur $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$
 Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe
 Alors f admet un extremum local en x_0

« f' s'annule en x_0 en changeant de signe », cela signifie qu'il existe $\alpha > 0$

tel que $f' < 0$ sur $]x_0 - \alpha, x_0[$ et $f' > 0$ sur $]x_0, x_0 + \alpha[$
 ou bien le contraire.

3.2 prolongement de la dérivée**Propriété 16 : Théorème de prolongement de la dérivée**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur I
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$
- $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$

Propriété 17 : Théorème de prolongement de la dérivée (cas fini)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur I
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$
- $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell$ ℓ fini

Alors

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$
- Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$
- Et $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ donc f' est continue en a

Démonstration

On va démontrer la dérivabilité à droite. On ferait de même pour la dérivabilité à gauche

On suppose donc f continue sur $[a, b] = I$, dérivable sur $]a, b]$ et telle que :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \ell \text{ avec } \ell \in \mathbb{R}$$

Il s'agit de montrer que f est dérivable en a c'est-à-dire que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Soit encore que $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| \leq \varepsilon$ pour $|x - a|$ « assez petit »

Soit $\varepsilon > 0$

On a $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \ell$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I, a < x < a + \alpha \Rightarrow |f'(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in I$ tel que $a < x < a + \alpha$

On a f continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x]$

On peut donc appliquer l'EAF sur $[a, a + x]$:

Il existe $c \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$

Or $a < c < x$ et $x < a + \alpha \Rightarrow a < c < a + \alpha$

et donc $|f'(c) - \ell| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| \leq \varepsilon \text{ pour tout } x \in]a, a + \alpha[$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| = 0$$

On a donc bien $f'(a) = \ell$

Propriété 18 : Prolongement de la dérivée (cas infini)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Soit f une application continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ telle que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = +\infty \text{ (resp. } -\infty)$$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (resp. $-\infty$)

et C_f admet une demi-tangente verticale en a

4 Dérivées successives

Définition 7 : Dérivées successives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

Si f' est dérivable, on note f'' la dérivée de f' , appelée *dérivée seconde* de f .

Si f'' est dérivable, on note $f''' = f^{(3)} = (f'')'$ la dérivée troisième de f .

De même, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f si elle existe.

On a $f^{(n+1)} = [f^{(n)}]'$

Par convention : $f^{(0)} = f$.

Exemple :

$$\text{Dérivée } n\text{-ème de } f(x) = \frac{1}{x}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f^{(3)}(x) = \frac{-2 \times 3}{x^4} = \frac{-3!}{x^4}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

• initialisation : Vrai au rang $n = 0$

• hérédité : Supposons la relation vraie au rang n

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \\ \Rightarrow f^{(n+1)}(x) &= \left[\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \right]' = \frac{(-1)^n n! \times (-(n+1))}{x^{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \times (n+1)!}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

La relation est donc vraie au rang $n+1$.

Définition 8 : Fonction de classe C^n

- f est dite de classe C^0 si f est continue.
- f est dite de classe C^n sur I si f est n fois dérivable et si sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est continue sur I .
- f est dite de classe C^∞ si f admet des dérivées à tous les ordres.

Propriété 19 : Formule de Leibniz

Soit f et g deux fonctions admettant une dérivée $n^{\text{ème}}$ sur I
Alors $f.g$ admet aussi une dérivée $n^{\text{ème}}$ sur I et

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Exemple : Calculer la dérivée n -ème de $h(x) = x^3 e^{\lambda x}$ (discuter en fonction de n)

$$h(x) = x^p e^{\lambda x} = f(x)g(x) \quad \text{avec } f, g \text{ } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$h^{(n)}(x) = (f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

$$f(x) = x^p \Rightarrow f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n} & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$$

$$g(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow g^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

- Pour $n \leq p$: $h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{p!}{(p-k)!} x^{p-k} \lambda^{n-k} e^{\lambda x}$
- Pour $n \geq p$: $h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \frac{p!}{(p-k)!} x^{p-k} \lambda^{n-k} e^{\lambda x}$

car $f^{(k)} = 0$ pour $k > p$

Propriété 20 : Composée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant une dérivée $n^{\text{ème}}$ et telles que $f(I) \subset J$
Alors $g \circ f$ admet aussi une dérivée $n^{\text{ème}}$ sur I
De plus, si f et g sont de classe C^n , alors $g \circ f$ l'est également

Démonstration Idée :

Si f et g sont dérivable alors $f \circ g$ l'est également et $(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$

Par récurrence, on admet que c'est vrai au rang n

Si f et g admettent une dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$, alors f' et g' admettent une dérivée $n^{\text{ème}}$

Donc par hypothèse de récurrence, $(f' \circ g)$ admet une dérivée $n^{\text{ème}}$

Donc $(f \circ g)'$ admet une dérivée $n^{\text{ème}}$

D'où $(f \circ g)$ admet une dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$

On procède de même si f et g sont de classe C^n

Propriété 21 : Fraction

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant une dérivée $n^{\text{ème}}$ et telles que $\forall x \in I, g(x) \neq 0$

Alors $\frac{f}{g}$ admet aussi une dérivée $n^{\text{ème}}$ sur I

De plus, si f et g sont de classe C^n , alors $\frac{f}{g}$ l'est également

Démonstration

Si g est n fois dérivable alors par composée avec la fonction $i : x \mapsto 1/x$, $1/g = i \circ g$ est n fois dérivable.

f et $1/g$ sont n fois dérivable, donc par produit $f/g = f \times (1/g)$ est n

fois dérivable

Propriété 22 : Réciproque

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection admettant une dérivée $n^{\text{ème}}$ sur I et telle que $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$
 Alors $f^{-1} : J \rightarrow I$ admet une dérivée $n^{\text{ème}}$ sur J
 De plus, si f est de classe C^n , alors f^{-1} l'est également

Démonstration Idée :

Si f est dérivable et $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y = f(x)$ et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$$

Par récurrence, on admet que c'est vrai au rang n

Si f admettent une dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$, alors, par hypothèse de récurrence, f^{-1} admet une dérivée $n^{\text{ème}}$

De plus f' admet une dérivée $n^{\text{ème}}$

Donc $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ admet une dérivée $n^{\text{ème}}$

Donc $(f^{-1})'$ admet une dérivée $n^{\text{ème}}$

D'où f^{-1} admet une dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$

5 Convexité

Propriété 23 : paramétrage d'un segment

Soient de point du plan $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$
 Alors les points du segment $[M_1, M_2]$ sont les points M de coordonnées
 $(t.x_1 + (1-t).x_2, t.y_1 + (1-t).y_2)$ avec $t \in [0, 1]$

Démonstration

$M(x, y)$ appartient au segment $[M_1, M_2]$ si et seulement si

$$\overrightarrow{M_1M} = (1-t).\overrightarrow{M_1M_2} \text{ avec } t \in [0, 1]$$

(Si $t = 0$, $M = M_2$ et si $t = 1$, $M = M_1$)

$$\text{Or } \overrightarrow{M_1M} = (1-t).\overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\iff \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = (1-t).(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1})$$

$$\iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} - (1-t).\overrightarrow{OM_1} + (1-t).\overrightarrow{OM_2}$$

$$\iff \overrightarrow{OM} = t.\overrightarrow{OM_1} + (1-t).\overrightarrow{OM_2}$$

Ce qui donne la relation sur les coordonnées de M

Propriété 24 : paramétrage d'une corde

Soient f une fonction et $M_1(x_1, f(x_1))$ et $M_2(x_2, f(x_2))$
 $[M_1, M_2]$ est appelé une corde de la courbe C_f
 Alors les points de la corde $[M_1, M_2]$ sont les points M de coordonnées
 $(t.x_1 + (1-t).x_2, t.f(x_1) + (1-t).f(x_2))$ avec $t \in [0, 1]$

Définition 9 : Fonctions convexes, concaves

- f est convexe sur I ssi la courbe C_f est au-dessous de ses cordes
- f est concave sur I ssi la courbe C_f est au-dessus de ses cordes

Propriété 25 : Fonction convexe, concave

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est convexe sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall t \in [0, 1]$,
 $f(t.x_1 + (1-t).x_2) \leq t.f(x_1) + (1-t).f(x_2)$.
- f est concave sur I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall t \in [0, 1]$,
 $f(t.x_1 + (1-t).x_2) \geq t.f(x_1) + (1-t).f(x_2)$.

Pour un point M de la corde $[M_1, M_2]$, on a : $t.x_1 + (1-t).x_2 = x_M$ et $t.f(x_1) + (1-t).f(x_2) = y_M$

Donc f est convexe si $f(x_M) \leq y_M$ C'est-à-dire que M est au-dessus du point $(x_M, f(x_M))$ de la courbe C_f

Donc f est convexe (resp. concave) si les cordes de C_f sont au-dessus (resp. au dessous) de C_f

Propriété 26 : Lien entre convexité et concavité

Une fonction f est concave sur un intervalle I si et seulement si $-f$ est convexe sur I .

Propriété 27 : Convexité et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur I
- En tout point de I , la courbe C_f est au dessus de ses tangentes
- f' est croissante sur I

Propriété 28 Convexité et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I . Alors

$$f \text{ est convexe sur } I \iff \forall x \in I, f''(x) \geq 0$$

$$f \text{ est concave sur } I \iff \forall x \in I, f''(x) \leq 0$$

Démonstration

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ est croissante sur } I \iff f'' \text{ est positive sur } I$$

Propriété 30 : Inégalité des accroissements finis dans $\mathbb{C}$

Soit f une fonction de classe C^1 sur I et $M \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in I, |f'(t)| \leq M.$$

Alors $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

6 Fonctions à valeurs complexes

Dans cette section, on considère une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 10 : Dérivabilité

Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{C}$.

On note alors $f'(a)$ la valeur de la limite.

Propriété 29 : Dérivabilité et parties réelle et imaginaire

Soit $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables en a .

On a alors : $f'(a) = (\operatorname{Re}(f))'(a) + \mathbf{i}(\operatorname{Im}(f))'(a)$.