

1 Application

1.1 Définition

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F fait correspondre à tout élément x de E un unique élément y de F qu'on note $f(x)$.

On écrit alors : $f : E \rightarrow F, x \mapsto y = f(x)$

- E est appelé l'ensemble de départ de f
- F est appelé l'ensemble d'arrivée de f .
- y est appelé l'image de x par f
- x est noté un antécédent de y par f .

Tout élément de E admet une *unique image* dans F par f .

Cela implique donc l'existence d'au plus une image :

$$\forall (x, x') \in E^2, x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$$

(Attention : il n'y a pas équivalence)

ou encore, par contraposée : $\forall (x, x') \in E^2, f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'$.

1.2 Égalité de deux applications

Définition 1 : Égalité de deux applications

Deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : G \rightarrow H$ sont égales si et seulement si :

- elles ont même ensemble de départ ($E = G$)
- elles ont même ensemble d'arrivée ($F = H$)
- elles coïncident sur leur ensemble de départ :
 $\forall x \in E, f(x) = g(x)$

1.3 Sommes et produit

Définition 2 : Sommes et produit

Soient f et g deux applications de E dans $\mathbb{R}$

On définit les applications suivantes :

- $f + g : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f.g : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (f.g)(x) = f(x).g(x)$
- Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a.f + b.g : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (a.f + b.g)(x) = a.f(x) + b.g(x)$

1.4 Composée de deux applications

Définition 3 : Composée de deux applications

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

On appelle composée de f et g l'application notée $g \circ f$ de E dans G définie par :

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Propriété 1 : associativité

Soient $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G, h : G \rightarrow H$, trois applications.

On a alors : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

(La composée des applications est *associative*.)

Démonstration

- $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ sont deux applications de E dans H (trivial)
- Soit $x \in E$,

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)[f(x)] = h[g[f(x)]]$$

D'autre part

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g(f(x))]$$

On a donc bien $\forall x \in E, [(h \circ g) \circ f](x) = [h \circ (g \circ f)](x)$

- Conclusion $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Propriété 2 distributivité

Soient f, g, h trois applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Alors $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$

Par contre, en général $f \circ (g + h) \neq (f \circ g) + (f \circ h)$

Démonstration

Notons (A) la formule d'addition : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

et (C) la formule de composition : $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

- $(f + g) \circ h$ et $(f \circ h) + (g \circ h)$ sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$[(f + g) \circ h](x) = (f + g)[h(x)] \quad (C)$$

$$= f(g(x)) + g(h(x)) \quad (A)$$

$$= (f \circ g)(x) + (g \circ h)(x) \quad (C)$$

$$= (f \circ g + g \circ h)(x) \quad (A)$$

- Conclusion $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$

1.5 Applications particulières**Définition 4 : Application nulle**

$$\begin{array}{|l} \bar{0} : E \rightarrow F, x \mapsto 0 \text{ ou encore} \\ \forall x \in E, \bar{0}(x) = 0 \end{array}$$

Une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est nulle si et seulement si :

$$\forall x \in E, f(x) = 0.$$

Une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est non nulle si et seulement si :

$$\exists x \in E, f(x) \neq 0.$$

Attention :

f est donc non nulle s'il existe au moins un élément qui ne donne pas 0, et absolument pas si tous les éléments donnent un résultat non nul.

Définition 5 : application constante

Soit $f : E \rightarrow F$

f est constante si et seulement si :

$$* \text{ ou bien } \exists b \in F, \forall x \in E, f(x) = b.$$

$$* \text{ ou bien } \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2)$$

$$* \text{ ou bien } \exists a \in E, \forall x \in E, f(x) = f(a)$$

Ces trois définitions sont bien sûr équivalentes. Mais il est important de les retenir car chacune d'elle peut être utile dans un contexte donné.

Définition 6 : Application identité

Soit E un ensemble.

L'application identité est l'application de E dans E notée Id_E définie par :

$$\forall x \in E, \text{Id}_E(x) = x$$

ou encore : $\text{Id}_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$

$$\text{pour } f : E \rightarrow F, \quad f \circ \text{Id}_E = f$$

$$\text{pour } g : F \rightarrow E, \quad \text{Id}_E \circ g = g$$

Définition 7 : Fonction indicatrice

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E .

La fonction indicatrice de A dans E est l'application de E dans $\mathbb{R}$,

notée 1_A , définie par : $\forall x \in E, 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exemples : $1_{[0,1]}$, $1_{\mathbb{Q}}$

2 Image directe et image réciproque d'un ensemble**Définition 8 : Image directe**

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $A \subset E$

On appelle image directe de A par f le sous-ensemble de F noté $f(A)$ défini par :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in F / \exists x \in A, f(x) = y\} \\ &= \{f(x) / x \in A\} \end{aligned}$$

Définition 9 : Image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $B \subset F$

On appelle image réciproque de B par f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$

défini par : $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

Propriété 3

Soient une application $f : E \rightarrow F$, $A \subset E$, $B \subset F$

$$\forall y \in F, \quad y \in f(A) \iff \exists x \in A, f(x) = y$$

$$\forall x \in E, \quad x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

ATTENTION : **Ne pas confondre** :

- $f^{-1}(\{y\})$ est l'image réciproque de l'ensemble $\{y\}$. C'est un **sous-ensemble** de E
- $f^{-1}(y)$: cette notation n'est valable que si f est une **bijection**. Dans ce cas, $f^{-1}(y)$ est un **élément** de E .

Cette notation est donc totalement prohibée pour une application quelconque (cad non bijective)

Définition 10 : Fonction à valeurs dans A

$f : E \rightarrow F$ est dite « à valeurs dans A » si et seulement si
 $\forall x \in E, f(x) \in A$

Cela équivaut à dire que $f(E) \subset A$

3 Bijection**3.1 Injective, surjective****Définition 11 : Nombre d'antécédents**

Soit $f : E \rightarrow F$ une application

- f est injective
 $\iff$ tout élément y de F a **au plus** un antécédent x dans E .
- f est surjective
 $\iff$ tout élément y de F a **au moins** un antécédent x dans E .
- f est bijective
 $\iff$ tout élément y de F a **un unique** antécédent x dans E .

ATTENTION :

Pour dire si une application est surjective ou bijective, il est FONDAMENTAL de bien préciser l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

Définition 12 : Injection

Une application $f : E \rightarrow F$ est injective si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Dans ce cas, on dit aussi que f est une injection de E dans F

Ou encore, par contraposée

$$f : E \rightarrow F \text{ est injective ssi } \forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Définition 13 : Surjection

Une application $f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

Dans ce cas, on dit aussi que f est une surjection de E dans F

Définition 14 : Bijection

f est bijective $\iff f$ est injective et surjective.

Propriété 4 : Solutions d'une équation

- f est injective $\iff$ pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet **au plus** une solution x dans E
- f est surjective $\iff$ pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet **au moins** une solution x dans E
- f est bijective $\iff$ pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet **une unique** solution x dans E

3.2 Bijection réciproque**Définition 15 : Bijection réciproque**

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective.

L'application réciproque de f est l'application $f^{-1} : F \rightarrow E$ qui à tout élément de F associe son antécédent par f dans E .

Cette application est bijective.

Propriété 5

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective et $f^{-1} : F \rightarrow E$ sa réciproque.

On a alors :

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)}$$

Et de plus :

$$\boxed{f \circ f^{-1} = \text{Id}_F \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_E}$$

Démonstration

- $\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
Cela découle immédiatement de la définition.
- $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ On a $f : E \rightarrow F$ et $f^{-1} : F \rightarrow E$
Donc $f \circ f^{-1} : F \rightarrow F$ et $f^{-1} \circ f : E \rightarrow E$
- Soit $y \in F$, Posons $x = f^{-1}(y)$
On a donc $y = f(x)$
D'où $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = \text{Id}_F(y)$
Donc $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$
- Soit $x \in E$, posons $y = f(x)$ On a donc $x = f^{-1}(y)$ car f est bijective
D'où $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = \text{Id}_E(x)$
Donc $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$

Exemple :

$] - \infty, 2] \rightarrow [1, +\infty[, x \mapsto x^2 - 4x + 5$

Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque

On va montrer par analyse-synthèse que tout élément y de $[1, +\infty[$ admet un unique antécédent x dans $] - \infty, 2]$

- Soit $y \in [1, +\infty[$
- Analyse : Supposons qu'il existe $x \in] - \infty, 2]$ tel que $y = f(x)$
Par équivalences on a :

$$f(x) = y$$

$$\iff x^2 - 4x + 5 = y$$

$$\iff x^2 - 4x + 5 - y = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(5 - y) = 4(-1 + y)$$

§ 1er cas : $y = 1$

une seule solution $x = \frac{4}{2} = 2 \in] - \infty, 2]$

§ 2ème cas : $y > 1$

Deux solutions possibles :

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{4(-1 + y)}}{2} = 2 + \sqrt{-1 + y} \text{ et } x_2 = 2 - \sqrt{-1 + y}$$

Or $\sqrt{-1 + y} > 0 \Rightarrow x_1 > 2 \notin] - \infty, 2]$ Il reste donc x_2

§ Dans tous les cas, il y a une seule solution possible :
 $x = 2 - \sqrt{-1 + y}$

- Synthèse : prenons $x = 2 - \sqrt{-1 + y}$
Il reste à justifier : 1) que x existe 2) que $x \in] - \infty, 2]$ 3) que $f(x) = y$
1) $y \in [1, +\infty[\Rightarrow -1 + y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{-1 + y}$ existe et donc x aussi
2) $\sqrt{-1 + y} \geq 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{-1 + y} \leq 2 \Rightarrow x \in] - \infty, 2]$
3) D'après l'analyse, puisque qu'on avait raisonné par équivalence :
 $y = f(x) \iff x = x_1 \text{ ou } x = x_2$
Ici, $x = x_2$ donc $y = f(x)$
- Conclusion : $y \in [1, +\infty[$ admet bien un unique antécédent
 $x = 2 - \sqrt{-1 + y}$ dans $] - \infty, 2]$
Donc f est bijective et
 $f^{-1} : [1, +\infty[\rightarrow] - \infty, 2], y \mapsto f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{-1 + y}$

Propriété 6 : Propriété caractéristique de la réciproque

Soit f une application de E dans F

S'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que
 $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$.

Alors f et g sont bijective et $g = f^{-1}$

Remarque : Il faut avoir les deux égalités :

$$f \circ g = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \text{Id}_E.$$

Une seule ne suffit pas.

Exemple : $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{sinon} \end{cases}$

On a $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ et pourtant ni f ni g ne sont bijectives.

Démonstration

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ telles que $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$.

- Mq f est injective

Soit $x_1, x_2 \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{car } g \circ f = \text{Id}_E$$

Donc f est injective

- Par raison de symétrie, on a aussi g injective

- Montrons que f est surjective

Soit $y \in F$

Posons $x = g(y)$

On a $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$ car $f \circ g = \text{Id}_F$

Il existe donc bien $x \in E$ tel que $y = f(x)$

f est surjective

- Par symétrie, g est aussi surjective

- conclusion : f et g sont bijectives

- Montrons que $g = f^{-1}$

§ g et f^{-1} sont deux applications de F dans E

§ Soit $y \in F$. Montrons que $g(y) = f^{-1}(y)$

$$\text{Or } f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \text{Id}_F(y) = y$$

$$f(g(y)) = y$$

$$\text{Donc } g(y) = f^{-1}(y)$$

§ Conclusion : $g = f^{-1}$

Exercice :

Soient $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-, x \mapsto -x^2$ et $g : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \sqrt{-x}$

1) Montrer que f et g sont bien définies (ensemble de départ et d'arrivée)

2) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$

3) Conclusion ?

Solution

- Remarquons d'abord que f est bien définie

car pour tout $x \in \mathbb{R}^+, f(x) = -x^2 \in \mathbb{R}^-$

- g est bien définie car pour $x \in \mathbb{R}^-, \sqrt{-x}$ existe et $g(x) = \sqrt{-x} \in [0, +\infty[$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+,$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x^2) = \sqrt{-(-x^2)} = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

car $x \geq 0$

- pour tout $x \in \mathbb{R}^-,$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{-x}) = -(\sqrt{-x})^2 = -(-x) = x$$

- On a donc $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}^-}$ et $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^+}$

Donc f et g sont bijectives et $f^{-1} = g$

Propriété 7

|| Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications bijectives.
Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

f et g sont bijectives donc : $f^{-1} : F \rightarrow E$ et $g^{-1} : G \rightarrow F$ existent.

Posons $h = f^{-1} \circ g^{-1} : G \rightarrow E$

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ h &= (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ (\text{Id}_F) \circ g^{-1} = (g \circ \text{Id}_F) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_G. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ (\text{Id}_F) \circ f = f^{-1} \circ (\text{Id}_F \circ f) = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \end{aligned}$$

D'où $(g \circ f) \circ h = \text{Id}_G$ et $h \circ (g \circ f) = \text{Id}_E$.

Donc, d'après la propriété précédente,

$$g \circ f \text{ est bijective} \quad \text{et} \quad (g \circ f)^{-1} = h = f^{-1} \circ g^{-1}$$

4 Restriction, prolongement

Idée Restriction :

On sait que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ n'est pas bijective

Par contre si on restreint les ensembles de départ et d'arrivée, on peut définir une nouvelle fonction. Par exemple : $g : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$ qui est bijective

Il existe une infinité de possibilités. Par contre, il faut qu'on obtienne encore une fonction.

Par exemple : $h : \mathbb{R}^- \rightarrow [1, +\infty[$ ne marche pas parce par exemple 0 n'a pas d'image dans $[1, +\infty[$. h n'est donc pas une application.

Cela motive donc la définition suivante :

Définition 16 : Restriction d'une application

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$ deux ensembles tels que

$$\underline{f(A) \subset B} \quad (\text{c'est-à-dire : } \forall x \in A, f(x) \in B)$$

Alors la restriction de f à A au départ et B à l'arrivée, qui est notée $f|_A^B$, est définie par :

$$f|_A^B : A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$$

Définition 17 : Prolongement

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, $E \subset E_1$. On appelle prolongement de f sur E_1 toute application

$$\tilde{f} : E_1 \rightarrow F \quad \text{telle que} \quad \forall x \in E, \tilde{f}(x) = f(x)$$