

1) $\sin(5\pi/4) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ (C 100c)

2) $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z^n) =$ PFC (C 203)

3) Définition : $z \in \mathbb{C}$, (C 250a)
 $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)} = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \sin(\operatorname{Im}(z)))$

4) Vrai ou Faux ?... **FAUX** (C 356b)

$$\arg\left(\frac{z_w}{z_u}\right) = 0 \quad [\pi] \iff (u, v) \text{ sont colinéaires de même sens}$$

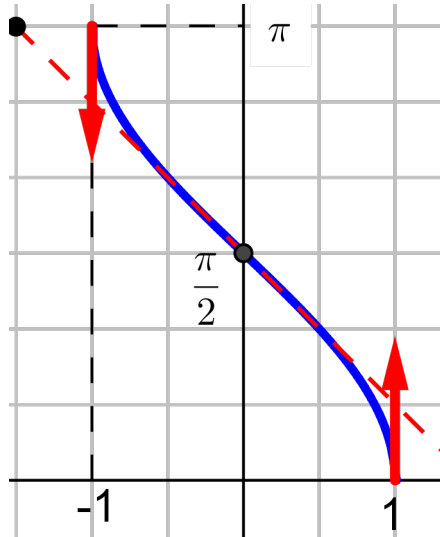
En effet $\arg\left(\frac{z_w}{z_u}\right) = \arg(z_w) - \arg(z_u)$

Et u, v colinéaires de même sens $\iff \arg(z_w) - \arg(z_u) = 0 \quad [2\pi]$

Et u, v colinéaires $\iff \arg(z_w) - \arg(z_u) = 0 \quad [\pi]$

Dans ce dernier cas, vous pouvez avoir $\arg(z_w) - \arg(z_u) = \pi \quad [2\pi]$
 et alors u, v sont colinéaires de sens opposé

5) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \arccos x$ (C 451)



Tracer la tangente en 0 qui a pour équation : $y = -x + \frac{\pi}{2}$

Remarque : avec l'approximation $\pi \simeq 3$, la tangente passe par les points $(0; \pi/2)$ et $(-1.5; \pi)$

6) $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k\right) = \left(\sum_{j=1}^n a_j\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j b_k$ (C 502c)

Il faut changer au moins un des indices pour le faire correctement

7) Suite récurrente linéaire ordre 2 à valeurs dans $\mathbb{C}$ (C 540a)

$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (avec $\Delta = a^2 + 4b$) Cas $\Delta \neq 0$:

Les solutions complexes sont de la forme : $u_n = \lambda \cdot r_1^n + \mu \cdot r_2^n$

avec $(\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2$ et r_1, r_2 racines de l'équation $r^2 = ar + b$

8) Vrai ou Faux ?... **Faux** (C 581d)

Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -3 \Rightarrow x^2 \leq 9$

par exemple pour $x = 4$

9) $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 15 = \frac{15!}{2 \times 4 \times \dots \times 14} = \frac{15!}{2^7 \cdot 7!}$ (C 623a)

10) Vrai ou Faux ?... **Faux** (C 723a)

$\forall x \in \mathbb{R}, (x > 2 \text{ et } x > 3) \iff (x > 2)$

11) Vrai ou Faux ?... **Vrai** (C 752h)

$f : E \rightarrow F$ une application

Alors $\forall (x, y) \in E^2, x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$

12) Soit $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. $f + g$ est définie par : (C 767)

$f + g : E \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Pour définir une correctement fonction, il faut donner - son ensemble de départ, - son ensemble d'arrivée, - l'image de tout x du départ

13) Équivalent en 0 avec $\cos x : 1 - \cos x \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2}$ (C 807b)

14) Si ℓ est un réel non nul ($\ell \in \mathbb{R}^*$) (C 833)

Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \underline{f(x)} \sim_{x \rightarrow a} \ell$

- 15) Équivalent de $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$ en $+\infty$ (C 843d)

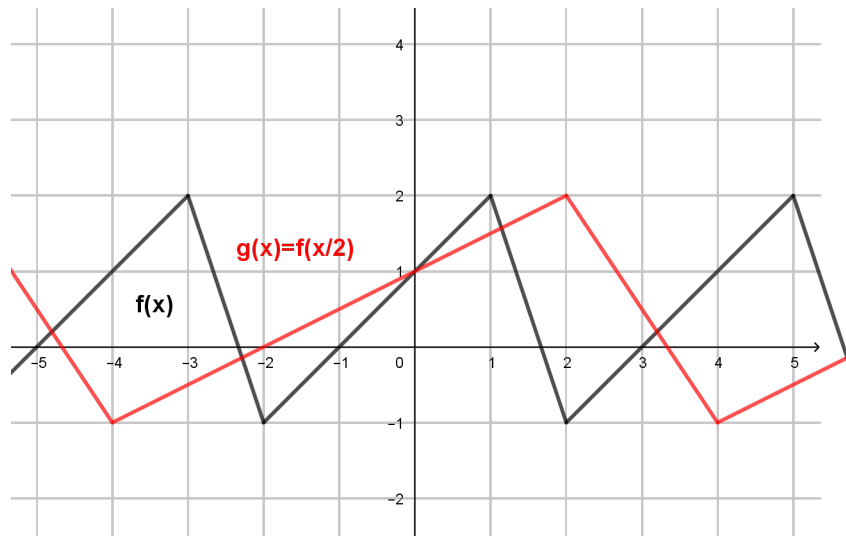
$$f(x) = \sqrt[3]{x} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) \quad \text{Or} \quad \sqrt[3]{1+X} - 1 = (1+X)^{1/3} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3}X$$

$$\text{avec } X = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^{1/3}}{3x} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

- 16) On a tracé une partie du graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

Tracer le graphe de g définie par $g(x) = f(x/2)$ (C 1005g)



- 17) Dérivabilité et dérivée de la réciproque en $y \in J$ (C 1036a)

Soit f une bijection de I sur J

Si f est dérivable en $x = f^{-1}(y)$ et $f'(x) \neq 0$

Alors f^{-1} est dérivable en y et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$

Évitez donc de justifier que f est bijective : c'est donné par l'énoncé. On ne va passer non plus sa vie entière à enfoncer des portes déjà ouvertes.

- 18) $\int^u \frac{x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int^u \frac{2x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+u^2) \quad \text{sur } \mathbb{R}$ (C 1076)

- 19) Différentielle : $d(1/t) = (-1/t^2) \, dt$ (C 1103b)

- 20) L'équation $y' + a.y = e^{\lambda x}$ avec $(a, \lambda) \in \mathbb{C}^2$ (C 1132a)
admet une solution particulière y_1 de la forme :

- 1er cas : si $\lambda \neq -a$ alors $y_1(x) = K.e^{\lambda x}$
- 2ème cas : si $\lambda = -a$ alors $y_1(x) = K.x.e^{\lambda x}$ avec $K \in \mathbb{C}$

- 21) L'équation $y' - \frac{2}{x}.y = 0 \quad (E_0)$ (C 1134b)

a pour solutions $y_0(x) = Cx^2$ avec $C \in \mathbb{C}$

Déterminer les solutions de l'équation $y' - \frac{2}{x}.y = 2x^3 \quad (E)$

On cherche une solution particulière $y_P(x) = C(x)x^2$

$$\Rightarrow y'_P(x) = C'(x)x^2 + C(x)2x$$

$$(E) \iff C'(x)x^2 + C(x)2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = 2x^3$$

$$\iff C'(x)x^2 = 2x^3 \iff C'(x) = 2x \quad \text{Par ex. } C(x) = x^2 \text{ convient}$$

$$\Rightarrow y_P(x) = y_P(x) = x^4 \Rightarrow y(x) = Ax^2 + x^4$$

- 22) Définition : Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ (C 1220a)

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Évitez les formulations relâchées du type

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Quand on demande une définition, on sort l'artillerie lourde

- 23) Théorème des suites adjacentes (C 1234b)

Si u et v sont adjacentes (avec u croissante)

Alors u et v convergent vers une même limite ℓ

telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$

On demande bien le théorème et pas la définition des suites adjacentes.

- 24) DL à l'ordre n (3 premiers et dernier termes) (C 1288b)

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

25) $f(3+h) = 1 - 2h^3 + o(h^3)$

(C 1308f)

Représenter C_f au voisinage de 3 (Unité = 1 carreau)

26) Soit f décroissante sur $]a, b[$ avec $a < b$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$
Si f n'est pas minorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$

(C 1516b)

27) Vrai ou Faux?... **Vrai**

(C 1552a)

La fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ pour $x > 0$
est prolongeable par continuité en 0

En effet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (limite finie)

28) Soit $f(x) = \sqrt{x} \sin(\sqrt{x})$ définie sur $[0, +\infty[$
 f est-elle dérivable en 0? (C 1570a)

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}{x} = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{\sin X}{X} \quad \text{avec } X = \sqrt{x}$$

Quand $x \rightarrow 0$, $X \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\sin X}{X} \rightarrow 1$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

29) Égalité des accroissements finis

(C 1801)

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

30) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ (E 1815b)

On admet que f est-elle continue en 0. f est-elle dérivable en 0?**Démontrez-le !**(On admettra que $\sin(1/x)$ et $\cos(1/x)$ ne convergent pas en 0)

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x} \quad \text{qui diverge quand } x \rightarrow 0$$

Donc f n'est pas dérivable en 0