

1) Pour $-1 < a < 3$, Encadrer $A = a^2$ (C 070d)

$$-1 < a < 3 \Rightarrow -1 < a < 0 \text{ ou } 0 \leq a < 3$$

$$\text{1er cas : } -1 < a < 0 \Rightarrow 0 < a < 1 \text{ car tout est négatif}$$

$$\text{2ème cas : } 0 \leq a < 3 \Rightarrow 0 \leq a^2 < 9 \text{ car tout est positif}$$

$$\text{Dans tous les cas } 0 \leq A < 9$$

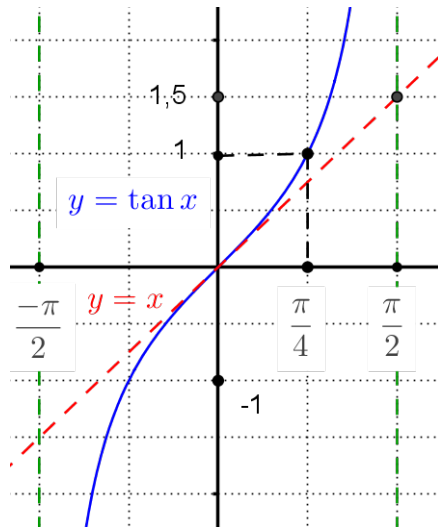
2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (C 103c)

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ OU } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3) Sous forme exponentielle : $-\mathbf{i} = e^{-i\pi/2}$ (C 247c)

4) Déf : $z \in \mathbb{C}$ est une racine n -ième de l'unité $\Leftrightarrow z^n = 1$ (C 320a)

5) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \tan x$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ (C 448a)



6) $\sum_{k=n}^{2n} a = (2n - n + 1)a = (n + 1)a$ (C 509a)

7) Définition : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \max(x, -x)$ (C 560a)

8) Vrai ou Faux?... **Vrai** (C 583b)

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 + 1 \neq 3 \Rightarrow x \neq 1$$

$$2x^2 + 1 \neq 3 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow (x \neq 1 \text{ ET } x \neq -1)$$

$$\text{Ou alors par contraposée : } (x = 1) \Rightarrow (2x^2 + 1 = 3) \text{ Vrai}$$

Attention : l'équivalence est fautive

9) Si $P \Rightarrow Q$ est VRAIE (C 703a)

alors sa négation est : **Fausse**

10) Démonstration de : $\forall x \in]0, 1[, \exists n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} > x$ (C 715e)

Soit $x \in]0, 1[$

Heuristique : cherchons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 - \frac{1}{n} > x$

$$\Leftrightarrow 1 - x > \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} < n \text{ Prenons } n = 1 + \left\lfloor \frac{1}{1-x} \right\rfloor$$

$$\bullet x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{1-x} \geq 1 \Rightarrow n \in \mathbb{N}^*$$

$$\bullet n > \frac{1}{1-x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} < 1 - x \text{ (tt est positif)} \Rightarrow x < 1 - \frac{1}{n}$$

11) $\forall x \in E, 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$ (C 760)

12) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions (C 768c)

$$x \in D_{f \circ g} \Leftrightarrow (f \circ g)(x) \text{ existe} \Leftrightarrow x \in D_g \text{ ET } g(x) \in D_f$$

13) Vrai ou faux ? ... **Faux** (C 823a)

$$f = o(h) \text{ et } g = o(h) \text{ en } a \Rightarrow f.g = o(h) \text{ en } a$$

$$\text{Par exemple en } +\infty : f(x) = x^2, g(x) = 2x^2, h(x) = x^3$$

$$x^2 = o(x^3) \text{ et } 2x^2 = o(x^3)$$

$$\text{pourtant } f(x).g(x) = 2x^4 \text{ n'est pas un } o(x^3)$$

14) Vrai ou faux ? ... **Faux** (C 830c)

Si f et g admettent des limites finies en a ,

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \Rightarrow f \sim_a g$$

Pour que ce soit vrai, il faut que les limites soient finies non nulles

Contre exemple en $a = 0$: $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \text{ et pourtant } f(x) \not\sim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

15) $\arccos(\cos(-12\pi/5)) = \arccos(\cos(-12\pi/5 + 2\pi))$ (C 915c)
 $= \arccos(\cos(-2\pi/5)) = \arccos(\cos(2\pi/5))$
 $= 2\pi/5$ car $2\pi/5 \in [0, \pi]$

16) $\arctan x < \pi/6 \iff x < \tan \pi/6 \iff x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ (C 925a)
 (avec $\arctan$ définie sur $\mathbb{R}$)

17) $\int u' u^\alpha = \begin{cases} \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln|u| & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$ (C 1051b)

18) $\int^u \frac{dx}{1+x^2} = \arctan u$ sur $\mathbb{R}$ (C 1068)

19) $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt = \int_x^{x^2} g(t) dt = G(x^2) - G(x)$ (C 1140b)
 $\Rightarrow f'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = 2x \frac{e^{x^2}}{x^2} - \frac{e^x}{x} = \frac{2e^{x^2} - e^x}{x}$
 avec $g(t) = \frac{e^t}{t}$ et G primitive de g

20) $ay'' + by' + c.y = e^{\alpha x} P(x)$ avec $P(x)$ un polynôme de d° n (C 1157a)
 Si $\underline{\alpha}$ est racine simple de l'équation $\underline{ax^2 + bx + c = 0}$
 Alors SP : $y_1(x) = \underline{x.e^{\alpha x}.Q(x)}$ avec $\underline{Q(x)}$ polynôme de degré n

21) Si une suite réelle u converge vers $\ell > 0$ (C 1229c)
 Alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$

Démonstration : Posons $\varepsilon = \ell/2 > 0$ On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Donc il existe $p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$

Avec $\ell - \varepsilon = \ell/2 \Rightarrow u_n \geq \ell/2 > 0$ pour $n \geq p$ CQFD

22) Vrai ou Faux ? ... **Faux** (C 837a)

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $(u_n)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (v_n)^n$

L'exemple classique : $u_n = 1 + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$

mais $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ donc pas équivalent à $1^n = 1$

Dès que cela frétille sous la puissance et ans la puissnace, rien en marche bien. Il faut passer à l'écriture exponentielle

23) Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$ (C 1298d)
 f admet un DL à l'ordre 1 en $a \iff f$ est dérivable en a

24) Limite de $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$ en 0 (C 1307)

$$f(x) = \frac{x - (e^x - 1)}{x(e^x - 1)} = \frac{N(x)}{D(x)} \quad D(x) = x(e^x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$$

$$N(x) = x + 1 - e^x = x + 1 - (1 + x + x^2/2 + o(x^2)) = -x^2/2 + o(x^2)$$

$$N(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2/2 \Rightarrow f(x) \sim \frac{-x^2/2}{x^2} = -1/2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-1}{2}$$

25) Si f est continue sur un segment $[a, b]$ alors (C 1522a)

f est bornée et f atteint ses bornes C'est-à-dire

$\exists (x_0, x_1) \in [a, b]^2$ tels que $\forall x \in [a, b], f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

26) Soit $f(x) = \arccos\left(\frac{3}{4} - x^2\right)$ (C 1019c)

• $\arccos x$ existe ssi $x \in [-1, 1]$ Donc $f(x)$ existe ssi

$$-1 \leq \frac{3}{4} - x^2 \leq 1 \iff -1 - \frac{3}{4} \leq -x^2 \leq 1 - \frac{3}{4}$$

$$\iff \frac{7}{4} \geq x^2 \geq -\frac{1}{4} \iff \frac{-\sqrt{7}}{2} \leq x \leq \frac{-\sqrt{7}}{2}$$

$$f \text{ est définie sur } D = \left[\frac{-\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{7}}{2} \right]$$

• $\arccos$ est dérivable sur $] -1, 1[$

$$\text{Donc } f \text{ est dérivable sur } D' = \left] \frac{-\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{7}}{2} \right[$$

27) F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E ssi (C 1400a)

• $F \subset E$

• $\vec{0}_E \in F$ (ou $F \neq \emptyset$)

• $\forall a \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in F^2, a.u + v \in F$

28) $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$ (C 557a)

$$\iff \underline{w \in \text{Vect}(u, v)} \iff \underline{w \text{ CL de } (u, v)}$$

29) Donner une famille génératrice du sev F de $\mathbb{R}^3$ (C 1417b)

d'équation $x - 2z = 0$

le sev de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2z = 0$

$$\text{Soit } k = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad k \in F \iff x = 2z$$

$$\iff k = (2z, y, z) = z \underbrace{(2, 0, 1)}_{= u} + y \underbrace{(0, 1, 0)}_{= v} = v(0, 1, 0)$$

$$\Rightarrow k \in \text{Vect}(u, v) \quad \text{D'où } F \subset \text{Vect}(u, v)$$

D'autre part u, v vérifient l'équation de F

$$\Rightarrow u, v \in F \Rightarrow \text{Vect}(u, v) \subset F$$

$$\text{Donc } F = \text{Vect}(u, v) \Rightarrow (u, v) \text{ famille gnératrice de } F$$

30) En utilisant l'inégalité des accroissements finis (C 1803b)

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

Pour $x \geq 0$, posons $\forall t \in [0, x], f(t) = \ln(1+t)$,

Sur $[0, x]$ f est continue et dérivable et $f'(t) = \frac{1}{1+t}$

Pour $0 \leq t \leq x, 0 < 1 \leq 1+t \leq 1+x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < f'(t) \leq 1, \forall t \in [1, x]$

$$\text{Donc } \frac{1}{1+x} < \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \text{car } x > 0$$