1) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ (C 014b)

2) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C 103c)

$\iff \quad x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{OU} \quad x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3) $\forall z,\ z' \in \mathbb{C}, \quad |z+z'| = |z| + |z'|$ (C 225c)

$\iff \quad z = 0 \quad \text{ou} \quad \exists a \in \mathbb{R}^+,\ z' = a.z$

$\boxed{\text{Il faut que les vecteurs associés soient colinéaires de même sens}}$

4) Racines n-ièmes <u>distinctes</u> de l'unité dans $\mathbb{C}$: (C 321c)

sont de la forme $\quad z_k = \omega^k \quad$ avec $\quad \omega = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{n}} \quad$ et $\quad k \in [[0, n-1]]$

5) La courbe (C) d'équation $\quad y = \exp x$ (C 440b)
admet une tangente d'équation : $\quad y = x + 1 \quad$ au point $(0;1)$

6) <u>Défintion</u> (u_n) est une suite géométrique de raison q. (C 514a)
$\iff \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q.u_n \quad \iff \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0.q^n$

7) (u_n) définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a.u_n + b \quad$ avec $\quad a \neq 1$ (C 549c)
Exprimer u_n en fonction de $n,\ u_0,\ a,\ b$

$\ell = a\ell + b \quad \iff \quad \boxed{\ell = \dfrac{b}{1-a}}$

$u_{n+1} = au_n + b \quad \iff \quad u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$

$\Rightarrow u_n - u_0 = a^n(u_0 - \ell) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)}$

8) $\min(x_1,\ \ldots,\ x_n) \leq a \quad \iff \quad \exists i \in [[1, n]],\ x_i \leq a$ (C 589f)

9) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 3^{-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k .1^{n+1-k} = \left(\frac{1}{3} + 1\right)^{n+1}$ (C 640c)

$= (4/3)^{n+1}$

10) $x \notin A \cap B \quad \iff \quad x \notin A \text{ OU } x \notin B$ (C 742a)

$\boxed{\text{Ecrire « } x \text{ n'appartient pas à A et B » n'a aucun sens logique}}$

11) $\forall x \in E,\ 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$ (C 760)

12) Équivalent de $\quad ln \quad$ avec $\quad \underline{x \to 1}$: $\quad \ln x \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$ (C 801d)

13) $f \underset{0}{\sim} h \quad$ et $\quad g \underset{0}{\sim} h \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0}(f-g) = 0 \quad$ est FAUX (C 825d)

Contre-exemple : $\quad h(x) = \dfrac{1}{x} \qquad f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$

$g(x) = -1 + \dfrac{1}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x} \quad$ mais $\quad f(x) - g(x) = 2 \nrightarrow 0$

14) Le domaine des valeurs de *arccos* est : $\quad [0, \pi]$ (C 900b)

15) Pour $a \in [-1,\ +1]$, $\arccos a = \frac{\pi}{5} \quad \iff \quad a = \cos\frac{\pi}{5}$ (C 920d)

16) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ (C 1015d)

$\iff$ La courbe C_f admet une asymptote horizontale en $-\infty$
d'équation $\quad y = a$

17) $\displaystyle\int^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \quad \arcsin t \quad$ sur $\quad]-1, 1[$ (C 1065)

18) Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ (C 1119b)
Alors $\quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt \quad \forall a \in \mathbb{R}$

19) Vrai ou faux ? . . . **Vrai** (C 1226c)
Si (u_n) converge alors (u_n) est bornée

20) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$ (C 1281a)

21) DL ordre 3 en 0 de (C 1300)

$$\ln(1+2x) = (2x) - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{car } 2x \to 0 \text{ qd } x \to 0$$
$$= 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

22) Soit f <u>décroissante</u> sur $]a,\ b[$ avec $a < b$, $(a,\ b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ (C 1515c)

Si f est minorée par m

alors f admet une limite finie en b

tel que $\forall x \in]a,\ b[, \quad m \leq \lim_b f \leq f(x)$

sinon $\lim_{b^-} f = -\infty$

23) Soit $f(x) = \arcsin(\sqrt{x+1})$ (C 1560b)
Sur quel domaine la fonction f est-elle définie ? dérivable ?

- $\sqrt{x+1}$ existe $\iff$ $x \geq -1.$
 $\arcsin(\sqrt{x+1})$ existe $\iff$ $-1 \leq \sqrt{x+1} \leq 1$ $\iff$ $x+1 \leq 1$ $\iff$ $0 \leq x$ $\quad D_f = \big[-1,\ 0\big]$
- $\sqrt{x+1}$ dérivable pour $x+1 > 0$ donc $x > -1$
 arcsin est dérivable sur $]-1,\ 1[\Rightarrow -1 < \sqrt{x+1} < 1 \iff x < 0$
 f dérivable sur$\big]-1,\ 0\big[$

24) Soit $A,\ B$ deux matrices carrées d'ordre n (C 1607)
Démontrer que AB est inversible $\Rightarrow$ A et B sont inversibles

Supposons AB inversible. Il existe donc une matrice C telle que
$$(AB)C = C(AB) = I \quad \Rightarrow \quad A(BC) = (CA)B = I$$

- $A(BC) = I$ et les matrices sont carrées donc A est inversible (d'inverse $A^{-1} = BC$)
- De même $(CA)B = I$, matrices carrées. Donc B est inversible (d'inverse $B^{-1} = CA$)

25) <u>Vocabulaire</u> : Dans un e.v. E, (C 1402c)

$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots,\ u_n)$ est appelé le sev de E engendré par $(u_1, \ldots,\ u_n)$

26) Donner une famille génératrice de F le sev de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y-2z=0$ (C 1417a)

Soit $k = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ $\quad k \in F \iff x = -y+2z$

$\iff k = (-y+2z,\ y,\ z) = y\underbrace{(-1,1,0)}_{=u} + z\underbrace{(2,0,1)}_{=v} = y.u + z.v$

$\Rightarrow \quad k \in \mathrm{Vect}(u,v) \qquad$ D'où $\quad F \subset \mathrm{Vect}(u,v)$

D'autre part u, v vérifient l'équation de F

$\Rightarrow \quad u, v \in F \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Vect}(u,v) \subset F$

Donc $\quad F = \mathrm{Vect}(u,v) \quad \Rightarrow \quad (u,v)$ famille génératrice de F

27) Vrai ou Faux ? …**Faux** (C 1427d)

Soient $(u_1, \ldots u_p)$ une famille de p vecteurs d'un ev E

$(u_1, \ldots u_p)$ est liée $\Rightarrow$ $\dim E < p$

On peut tout à fais avoir p vecteurs liés dans un ev de dimension p

28) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ (C 1815a)
f est-elle continue en 0 ? f est-elle dérivable en 0 ?
(On admettra que $\sin(1/x)$ et $\cos(1/x)$ ne convergent pas en 0

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |\sin(1/x)| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \leq |x|$

D'où par encadrement $\quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

f est donc continue en 0