Exercice 1
Soient $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\varphi : A \to B$ une application définie par :

$$\varphi(a) = 1,\ \varphi(b) = 2,\ \varphi(c) = 1,\ \varphi(d) = 5,\ \varphi(e) = 3,\ \varphi(f) = 5$$

a) Faire le diagramme sagittal de φ

b) Déterminer $\varphi(\{a, b\}),\ \varphi(\{b, d\},\ \varphi(A)$

c) Déterminer $\varphi^{-1}(\{1, 2\}),\ \varphi^{-1}(\{3, 4, 5\}),\ \varphi^{-1}(\{4, 5\}),\ \varphi^{-1}(B)$

d) Déterminer $\varphi^{-1}(f(\{a, b\})),\ \varphi^{-1}(f(\{c, d, e\}),\ \varphi^{-1}(f(A))$

e) Déterminer $\varphi(\varphi^{-1}(\{1, 2\})),\ \varphi(\varphi^{-1}(\{2, 3, 4\})),\ \varphi(\varphi^{-1}(B))$

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

Déterminer et démontrer les résultats obtenus :
a) $f^{-1}([-1, 2])$ b) $f([-1, 2])$

Exercice 3 (Classique) op 256
Soient E, F et G trois ensembles. Soient f et g deux applications respectivement de E dans F et de F dans G.
Montrez les propositions suivantes :

a) f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective

b) f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective

c) f et g bijectives $\Rightarrow g \circ f$ bijective

d) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective

e) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

f) $g \circ f$ bijective $\Rightarrow f$ injective et g surjective

Exercice 4 (*)
Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes

$j : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \begin{cases} n - 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

$k : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \begin{cases} -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Si une fonction est bijective, on donnera l'expression de sa réciproque.

Exercice 5 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que toute application strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$ est injective.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Montrer qu'on a $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 7
Trouver les ensembles suivants

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x + 1| - 2$

$$f([-2,\ 1]);\quad f([-3,\ 0]);\quad f^{-1}(]-1,\ 1]);\quad f^{-1}([-3,\ 0[)$$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |2x - 1| - 2x$

$$g([1,\ 3[);\quad g(]-1,\ 0[);\quad g^{-1}(]-2,\ 1]);\quad g^{-1}(]-3,\ -1])$$

Exercice 8 (Classique *) op 527
Soit f une application de E dans F. Montrer les propositions suivantes :

1) a) $\forall B \subset F,\ f(f^{-1}(B)) \subset B$.

b) f est surjective $\iff$ $\forall B \subset F,\ f(f^{-1}(B)) = B$.

c) Donner un exemple d'application f et d'ensemble B pour lesquels $f(f^{-1}(B)) \neq B$. (Donner un diagramme sagittal est suffisant si on précise bien les ensembles B, $f^{-1}(B)$ et $f(f^{-1}(B))$)

2) a) $\forall A \subset E,\ A \subset f^{-1}(f(A))$

b) f est injective $\iff$ $\forall A \subset E,\ A = f^{-1}(f(A))$

c) Donner un exemple d'application f et d'ensemble A pour lesquels $f^{-1}(f(A)) \neq A$.

Exercice 9 (**)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E et $f : P(E) \to P(A) \times P(B),\ X \mapsto (X \cap A,\ X \cap B)$ Montrer que :

a) f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$

b) f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$