Exercice 1 Est-ce un sous-espace vectoriel ?
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?
1. $E_1 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3; x+y+3z=0\}$;
2. $E_2 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3; x+y+3z=2\}$;
3. $E_3 = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4; x=y=2z=4t\}$;
4. $E_4 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; xy=0\}$;
5. $E5 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; y=x^2\}$;
6. $E_6 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3; 2x+3y-5z=0\} \cap \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3; x-y+z=0\}$;
7. $E_7 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3; 2x+3y-5z=0\} \cup \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3; x-y+z=0\}$.

Exercice 2
Les parties de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(a) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ est monotone $\}$
(b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ s'annule en $0\}$
(c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ s'annule $\}$
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ est impaire $\}$

Exercice 3
Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^4$ pour la dernière famille) ?

1) $(u;v)$ avec $u=(1;2;3)$ et $v=(-1;4;6)$
2) $(u;v;w)$ avec $u=(1;2;-1), v=(1;0;1)$ et $w=(0;0;1)$
3) $(u;v;w)$ avec $u=(1;2;-1), v=(1;0;1)$ et $w=(-1;2;-3)$
4) $(u;v;w;z)$ avec $u=(1;2;3;4), v=(5;6;7;8), w=(9;10;11;12)$ et $z=(13;14;15;16)$

Exercice 4
On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs
$$v_1=(1;1;0),\ v_2=(4;1;4),\ v_3=(2;-1;4).$$
1) Montrer que la famille $(v_1;v_2)$ est libre. Faire de même pour $(v_1;v_3)$, puis pour $(v_2;v_3)$.
2) La famille $(v_1;v_2;v_3)$ est-elle libre ?

Exercice 5
Soient u, v deux vecteurs d'un e.v. E. On appelle sous-espace engendré, noté $\mathrm{Vect}(u,v)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de (u,v)

1) Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $u=(1,2,3,4)$ et $v=(1,1,2,2)$
   a) Trouver un (système d') équation(s) de $\mathrm{Vect}(u,v)$ (cad une CNS pour que $k=(u,v,w,t) \in \mathbb{R}^4$ appartienne à $\mathrm{Vect}(u,v)$)
   b) Soit F le sev de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x+2y+z-3t$.
   Trouver des vecteurs $(u_1, u_2, \dots,)$ tels que tout élément de F soit CL de $(u_1, u_2, \dots,)$. Quelle inclusion vient-on de démontrer ?
   Réciproquement vérifier que ces vecteurs sont bien dans F
   c) Même question avec G d'équation $\begin{cases} 2x+y-z+t=0 \\ x+2y+3z+2t=0 \end{cases}$
2) a) Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v)$ est sev de E
   b) Soit F un sev de E. Montrer que
$$\mathrm{Vect}(u,v) \subset F \iff (u \in F \text{ et } v \in F)$$

Exercice 6
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 7 Est-ce un sous-espace vectoriel (matrices) ?
Determiner si les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$:
1. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : ad-bc=1 \right\}$
2. $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : x_1+x_2=x_4 \right\}$
3. $E_3 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^T = A\}$.

Exercice 8
Parmi les ensembles suivants quels sont les sev de E ? (Vous préciserez de plus s'il sont stables par addition et par multiplication) avec $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.)

$A=\{u / \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}-2u_n\}$; $C=\{u/u$ converge$\}$
$B=\{u / \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}-2u_n+1\}$; $D=\{u/u$ bornée$\}$;
$F=\{u / \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}|=|u_n|\}$