 FE 17 a (dimension)

Exercice 1

$\mathcal{B} = (e,\ f)$ est une base d'un ev E

$u,\ v$ ont pour coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$: $(2,\ 3)$ et $(3,\ 5)$

a) Montrer que $\quad \mathcal{U} = (u, v) \quad$ est une base de E

b) Soit w de cordonnées $(3, -4)$ dans la base $\mathcal{U}$
Donner les cordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$

c) Soit k de cordonnées $(7,\ 5)$ dans la base $\mathcal{B}$
Donner les cordonnées de k dans la base $\mathcal{U}$

d) Soient (x, y) les coordonnées de k dans $\mathcal{B}$ et (x', y') ses coordonnées dans $\mathcal{U}$. Déterminer $(x,\ y)$ en fonction de $(x',\ y')$ puis $(x',\ y')$ en fonction de $(x,\ y)$.
Écrire ces relations sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit F et G les sev de $\mathbb{R}^4$ d'équations respectives

$$F : \begin{cases} x + y - 2t = 0 \\ x + 2y + 2z - 5t = 0 \end{cases} \qquad G : \begin{cases} x - 4y - z + 4t = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

a) Déterminer des bases de F et de G

b) Déterminer une famille génératrice puis une base de $F + G$
F et G sont-ils en somme directe ?

c) Compléter cette base pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$

Exercice 3

Soit F le sev de $\mathbb{R}^4$ d'équation $\quad F : \begin{cases} y + t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Trouver un espace supplémentaire de F dont on donnera une base et des équations.

Exercice 4

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E.

Montrer que $\qquad F \subset G \quad \Rightarrow \quad F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$

Exercice 5

$F = \left\{(a,\ a + 2b,\ b + c,\ -c + a) /\ (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3\right\}$ Mq. F est un sev de $\mathbb{R}^4$

Exercice 1

$\mathcal{B} = (e,\ f)$ est une base d'un ev E

$u,\ v$ ont pour coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$: $(2,\ 3)$ et $(3,\ 5)$

a) Montrer que $\quad \mathcal{U} = (u, v) \quad$ est une base de E

b) Soit w de cordonnées $(3, -4)$ dans la base $\mathcal{U}$
Donner les cordonnées de w dans la base $\mathcal{B}$

c) Soit k de cordonnées $(7,\ 5)$ dans la base $\mathcal{B}$
Donner les cordonnées de k dans la base $\mathcal{U}$

d) Soient (x, y) les coordonnées de k dans $\mathcal{B}$ et (x', y') ses coordonnées dans $\mathcal{U}$. Déterminer $(x,\ y)$ en fonction de $(x',\ y')$ puis $(x',\ y')$ en fonction de $(x,\ y)$.
Écrire ces relations sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit F et G les sev de $\mathbb{R}^4$ d'équations respectives

$$F : \begin{cases} x + y - 2t = 0 \\ x + 2y + 2z - 5t = 0 \end{cases} \qquad G : \begin{cases} x - 4y - z + 4t = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

a) Déterminer des bases de F et de G

b) Déterminer une famille génératrice puis une base de $F + G$
F et G sont-ils en somme directe ?

c) Compléter cette base pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$

Exercice 3

Soit F le sev de $\mathbb{R}^4$ d'équation $\quad F : \begin{cases} y + t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Trouver un espace supplémentaire de F dont on donnera une base et des équations.

Exercice 4

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E.

Montrer que $\qquad F \subset G \quad \Rightarrow \quad F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$

Exercice 5

$F = \left\{(a,\ a + 2b,\ b + c,\ -c + a) /\ (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3\right\}$ Mq. F est un sev de $\mathbb{R}^4$