Exercice 1 On note $\mathcal{C} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ une base d'un espace vectoriel E
Soient $(u,\ v,\ w)$ trois vecteurs de E tels que

$$u = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \qquad v = e_1 + e_2 \qquad w = -e_2 + e_3$$

1. a) Montrer que (u, v, w) est une base de E notée $\mathcal{U}$.
   b) Quelle est l'ancienne base ? Quelle est la nouvelle base ?
   c) Quelle matrice de passage P s'obtient sans calcul ? Déterminer l'autre matrice de passage.
   d) Soit $k = 3e_1 + e_2 + e_3$
   Déterminer les coordonnées de k dans la base $\mathcal{U}$
   e) Soit $m = u+3v+w$. Déterminer les coordonnées de m dans la base $\mathcal{C}$
   f) Quelle sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{U}$?
   g) Soit $\vec{k}$ un vecteur de coordonnées respectives $(x,\ y,\ z)$ dans $\mathcal{C}$ et (x', y', z') dans $\mathcal{U}$.
   Quelle relation obtient-on avec la matrice P ? avec P^{-1} ?
2. On pose maintenant $\mathcal{F} = (e_2,\ e_3,\ e_1)$.
   a) Quelle matrice de passage Q entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ s'obtient sans calcul ? Déterminer son inverse sans calcul ?
   b) Soit un vecteur k de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{F}$. Déterminer ses cordonnées dans la base $\mathcal{C}$. Retrouver ainsi sans calcul une des matrices de passage
   c) Déterminer les deux matrices de passage entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ sans calcul.

Exercice 2
$e = (2,\ 3,\ -1),\ f = (1,\ -1,\ -2),\ u = (3,\ 7,\ 0),\ v = (5,\ 0,\ -7)$
On pose $F = \mathrm{Vect}(e,\ f)$ et $G = \mathrm{Vect}(u,\ v)$

a) Donner la dimension de F et la dimension de G.
b) Donner l'équation de G
c) Montrer que $F \subset G$. (Attention : on ne cherchera pas l'équation de F)
En déduire que $F = G$.

Exercice 3 Calculer le rang de familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^3$:

(a) $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ avec $x_1 = (1,\ 1,\ 0),\ x_2 = (1,\ 0,\ 1),\ x_3 = (0,\ 1,\ 1)$
(b) $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ avec $x_1 = (2,\ 1,\ 1),\ x_2 = (1,\ 2,\ 1),\ x_3 = (1,\ 1,\ 2)$
(c) $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ avec $x_1 = (1,\ 2,\ 1),\ x_2 = (1,\ 0,\ 3),\ x_3 = (1,\ 1,\ 2)$.

Exercice 4
Soient $F = \{f \in C^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$
et $G = \{x \mapsto ax + b \mid (a,\ b) \in \mathbb{R}^2\}$
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$. (On procèdera par analyse-synthèse)

Exercice 5 (Sucrerie)

Donner le $DL_{1000}(0)$ de $f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$

Exercice 6 (**Suite implicite**)

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction de courbe C_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = x - n.\ln(x)$$

1. a. Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
   b. En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
   c. Etudier la position relatives des courbes C_n et C_{n+1}
2. Étude de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.
   a. Montrer que $\forall n \geq 3, \quad 1 < u_n < e$.
   b. Montrer que (u_n) est décroissante. (En utilisant 1.c) par exemple)
   c. En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge et déterminer $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$
   d. Montrer que $u_n - \ell \sim \frac{1}{n}$.
3. Étude de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$
   a. Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.
   b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n > 2\ln(n)$.
   c. Établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)$
   d. Montrer enfin que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$