

Convexité

Exercice 1 Déterminer l'équation de la corde pour les fonctions suivantes. En déduire les inégalités de convexité associées.

1. $x \mapsto \sin(x)$ entre $\pi/2$ et π 2. $x \mapsto \cos(x)$ entre $\pi/2$ et π

Exercice 2 Prouver que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$
 2. $\forall u \in [0, \pi/2], \sin(u) \leq u$ et $2u \leq \pi \sin(u)$

Exercice 3 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 2 \exp(x/2) - 1$.

Exercice 4 Déterminer les intervalles de \mathbb{R} où les fonctions suivantes sont convexes.

1. $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 12}$ 2. $g : x \mapsto |x|$

Exercice 5 Soit $(a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Comparer $\frac{a_1 + a_2}{2}$ et $\sqrt{a_1 a_2}$

Espaces vectoriels

Exercice 6 Dans \mathbb{R}^3 , déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

- a) $F = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$
 b) $F = \text{Vect}(u, v, w)$ où $u = (-1, 1, 0)$, $v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$
 c) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + 3z = 0\}$

Exercice 7 Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une base et la dimension de chacun des sev suivants :

- a) D ensemble des matrices diagonales
 b) D^+ : ensemble des matrices triangulaires supérieures
 c) S : ensemble des matrices symétriques
 d) A : ensemble des matrices antisymétriques

Exercice 8 Soient les suites u, v, w définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)2^n, v_n = (n+2)2^n, w_n = (n+3)2^n$$

Montrer que (u, v, w) est liée sans aucun calcul.

Convexité

Exercice 1 Déterminer l'équation de la corde pour les fonctions suivantes. En déduire les inégalités de convexité associées.

1. $x \mapsto \sin(x)$ entre $\pi/2$ et π 2. $x \mapsto \cos(x)$ entre $\pi/2$ et π

Exercice 2 Prouver que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$
 2. $\forall u \in [0, \pi/2], \sin(u) \leq u$ et $2u \leq \pi \sin(u)$

Exercice 3 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 2 \exp(x/2) - 1$.

Exercice 4 Déterminer les intervalles de \mathbb{R} où les fonctions suivantes sont convexes.

1. $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 12}$ 2. $g : x \mapsto |x|$

Exercice 5 Soit $(a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Comparer $\frac{a_1 + a_2}{2}$ et $\sqrt{a_1 a_2}$

Espaces vectoriels

Exercice 6 Dans \mathbb{R}^3 , déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

- a) $F = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$
 b) $F = \text{Vect}(u, v, w)$ où $u = (-1, 1, 0)$, $v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$
 c) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + 3z = 0\}$

Exercice 7 Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une base et la dimension de chacun des sev suivants :

- a) D ensemble des matrices diagonales
 b) D^+ : ensemble des matrices triangulaires supérieures
 c) S : ensemble des matrices symétriques
 d) A : ensemble des matrices antisymétriques

Exercice 8 Soient les suites u, v, w définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)2^n, v_n = (n+2)2^n, w_n = (n+3)2^n$$

Montrer que (u, v, w) est liée sans aucun calcul.