1 Espace vectoriel

Définition 1 : Loi interne

Soit E un ensemble. Une loi de composition interne (l.c.i.) de E est une application de $E \times E$ dans E.

A un couple d'éléments de E, elle associe donc un élément de E.

Si on la note $\oplus$, on a :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x \oplus y \in E$$

Exemples

- L'addition, la soustraction, la multiplication dans $\mathbb{R}$
- L'addition, la multiplication des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- La composée des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Comme $\oplus$ est une application, il y a unicité de l'image.
Donc $(a,b) = (a',b') \quad \Rightarrow \quad a+b = a'+b'$
En particulier on a :

Propriété 1

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $\oplus$
Alors $\forall (a,\ b,\ c) \in E^3$

$$a = b \quad \Rightarrow \quad a \oplus c = b \oplus c$$
$$a = b \quad \Rightarrow \quad c \oplus a = c \oplus a$$

Dans une égalité on peut composer à droite ou bien à gauche

Définition 2 : Loi externe

Soit E et K deux ensembles. Une loi de composition externe sur E à opérateurs dans K est une application de $K \times E$ dans E.

Si on la note $\otimes$, on a : $\forall (\lambda, x) \in K \times E, \quad \lambda \otimes x \in E$

Exemples :

- L'élévation à la puissance des réels strictement positifs par les entiers : $[\mathbb{N} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, (n,x) \mapsto x^n]$
- La multiplication d'une fonction par un réel.

$\mathbb{K}$ sera dans tout ce qui suit l'ensemble $\mathbb{R}$ ou bien l'ensemble $\mathbb{C}$ ou bien plus rarement $\mathbb{Q}$

Définition 3 : Espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne notée « + » et d'une loi externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$ notée « . »

$(E,\ +,\ .)$ est un espace vectoriel s'il vérifie les propriétés suivantes

A1 : $\forall (u,\ v,\ w) \in E^3, \quad (u+v)+w = u+(v+w)$ (Associativité)

A2 : $\exists u_0 \in E,\ \forall u \in E, \quad u + u_0 = u_0 + u = u$ (Existence d'un élément neutre)

A3 : $\forall u \in E,\ \exists u' \in E, \quad u + u' = u' + u = u_0$ (Existence d'un symétrique)

A4 : $\forall (u,\ v) \in E^2, \quad u + v = v + u$ (Commutativité)

M1 : $\forall a \in \mathbb{K},\ \forall (u,\ v) \in E^2, \quad a.(u+v) = a.u + a.v$

M2 : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{K}^2,\ \forall u \in E, \quad (a+b).u = a.u + b.u$

M3 : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{K}^2,\ \forall u \in E, \quad (ab).u = a.(b.u)$

M4 : $\forall u \in E, \quad 1.u = u$

2 Propriétés élémentaires

Propriété 2 : élément neutre

L'élément neutre u_0 est unique.
Il est noté $\vec{0}_E$, ou plus simplement $\vec{0}$ et est nommé « le vecteur nul de E »

Propriété 3 : symétrique

Chaque vecteur u admet un unique symétrique qui sera noté $-u$.

u admet un unique symétrique dans E. On l'appelle donc le symétrique de u.

Et on a : $\boxed{\forall u \in E, \quad u + (-u) = (-u) + u = 0}$

Propriété 4 : Simplification

$\forall (u,v,w) \in E^3, \quad u+v = u+w \iff v+u = w+u \iff v = w$

Propriété 5 : Simplification

$\forall (u,v) \in E^2, \quad u+v = v \quad \iff \quad v+u = v \quad \iff \quad u = 0$

Propriété 6

$\forall (u,v) \in E^2, \quad u+v = 0 \iff v+u = 0 \iff v = -u$

Définition 4 : Notation

On note $\quad u+(-v) = u-v$

Lemme

$\forall a \in \mathbb{K},\ a.\vec{0} = \vec{0}$

$\forall u \in E,\ 0.u = u$

Propriété 7

$\forall (a,u) \in \mathbb{K} \times E, \quad [\ a.u = 0\ ] \iff [\ a = 0 \text{ ou } u = \vec{0}\ ]$

Propriété 8

$\forall u \in E,\ \forall \in \mathbb{K}, \quad (-1).u = -u \quad$ et $\quad (-a).u = a.(-u) = -(a.u)$

Propriété 9

$\forall (a,b) \in \mathbb{K}^2, \forall (u,v) \in E^2, \quad (a+b).(u+v) = a.u + a.v + b.u + b.v$

Propriété 10 (Généralisation

$\forall (a_k)_{1\le k\le n} \in \mathbb{K}^n,\ \forall (u_k)_{1\le k\le p} \in E^n,$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{p} u_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i.u_j$$

Évitez de confondre le **vecteur** nul $\vec{0}$ et le **réel** 0.

2.1 Exemples d'espaces vectoriels

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$. Exemple de $\mathbb{R}^3$:

  addition : $\quad (x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$
  multiplication : $a.(x,y,z) = (ax, ay, az)$
  vecteur nul : $(0,0,0)$
- $\mathbb{R}[X]$: l'ensemble des polynômes. Le vecteur nul est le polynôme nul.
- L'ensemble des applications de A dans $\mathbb{R}$. Le vecteur nul est l'application nulle $\overline{0}$ telle que : $\quad \forall x \in A,\ \overline{0}(x) = 0$
- L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le vecteur nul est la suite nulle $\overline{0} = (\overline{0}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \overline{0}_n = 0$
  Cette suite nulle est aussi notée $\quad (0)$

3 Sous-espace vectoriel

3.1 Définitions

Définition 5 : sev (celle dont on se sert)

Soit E un espace vectoriel.
F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si :

- $F \subset E$
- $\vec{0}_E \in F$
- $\forall (a,\ b) \in \mathbb{K},\ \forall (u,v) \in F^2, \quad a.u + b.v \in F$

Propriété 11 : sev

Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel.

Propriété 12 : Stabilité par CL

Soit F un sev de E. $\quad$ Alors :

$$\forall (u_1,\ \ldots,\ u_n) \in F^n,\ \forall (a_1,\ \ldots a_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \in F$$

Propriété 13 : intersection

L'intersection de n sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.

<u>Remarque</u>

Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel plus grand. Donc toutes les propriétés et définitions qui s'appliquent à un espace vectoriel s'appliqueront de même à un sous-espace vectoriel.

3.2 Principaux exemples de sous espaces vectoriels

- $\{\vec{0}\}$ est un sev de E.
- E est un sous-espace vectoriel de E.
- $C^0(\mathbb{R}),\ C^1(\mathbb{R}),\ C^2(\mathbb{R}), \dots, C^n(\mathbb{R}), \dots, C^\infty(\mathbb{R})$ sont des sous espaces vectoriels de l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  ($C^n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n fois dérivables et dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ est continue et $C^\infty(\mathbb{R})$ est l'ensemble des applications dérivables à tous les ordres)
- $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, est un sous espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X]$.

3.3 Exemples

- Exemple 1

  $F = \{(x,y,z)/x+2y+z=0 \text{ et } x-y-z=0\}$ est-il un sev de $\mathbb{R}^3$?

  - $F \subset \mathbb{R}^3$
  - $(0,0,0) \in F$.
  - Stabilité par combinaison linéaire
    Soient $(u,v) \in F^2$ et $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.
    On pose $u = (x,y,z)$ $v = (x',y',z')$.
    Montrons que $a.u + b.v \in F$.
    Posons $w = au + b.v = (X,Y,Z)$
    $w = a.u+b.v = a.(x,y,z)+b.(x',y',z') = (ax+bx',\ ay+by',\ az+bz')$
    $$\begin{aligned} X+2Y+Z &= (ax+bx') + 2(ay+by') + (az+bz') \\ &= a\underbrace{(x+2y+z)}_{=0 \text{ car } u\in F} + b\underbrace{(x'+2y'+z')}_{=0 \text{ car } v\in F} \\ &= 0 \end{aligned}$$
    On a de même :
    $$\begin{aligned} X-Y-Z &= (ax+bx') - (ay+by') - (az+bz') \\ &= a.(x-y-z) + b.(x'-y'-z') \\ &= a.0 + b.0 \quad (\text{car } (u,v) \in F^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$
    $$X+2Y+Z=0 \quad \text{et} \quad X-Y-Z=0$$
    $\Rightarrow$ $w = (X,Y,Z) \in F$
    Donc $a.u + b.v \in F$.
  - Conclusion F est donc bien un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

- Exemple 2

  $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y+z=0 \text{ ou } x-y-z=0\}$ est-il un sev de $\mathbb{R}^3$?

  F n'est pas stable pour l'addition. En effet, $u = (-2,1,0) \in F$ (1ere équation) et $v = (1,1,0) \in F$.(2ème éq.)

  Par contre $u + v = (-1,2,0) \notin F$

  Donc F n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$

4 Combinaisons linéaires et famille génératrice

4.1 Définitions

Définition 6 : Familles de vecteurs

Soit I un ensemble (fini ou non).
On appelle famille de vecteurs tout suite de vecteurs $(u_i)_{i\in I}$ indexée par I

Une famille de n vecteurs est notée en général $(u_1,\ u_2,\ \dots u_n)$ ou $(u_i)_{1\leq i\leq n}$

On dit que $\mathcal{F} = (u_k)_{k\in I}$ est une **sous-famille** de $\mathcal{G} = (u_k)_{k\in J}$ et que $\mathcal{G}$ est une **sur-famille** de $\mathcal{F}$ si $I \subset J$ c'est-à-dire si $\mathcal{G}$ est obtenue en « ajoutant » des vecteurs de E à la famille $\mathcal{F}$.

Exemples :

- (u) est une sous-famille de $(u,\ v)$ qui est une sous-famille de $(u,\ v,\ u)$
  Remarque : on peut a priori répéter plusieurs fois le même vecteur dans une famille.

- ($\emptyset$) la famille vide est considérée comme une sous-famille de toutes les autres familles.

Définition 7 : Combinaison linéaire

Soient $(u_1, \ldots, u_n)$, n vecteurs d'un espace vectoriel E.

On appelle combinaison linéaire des vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ tout vecteur de la forme

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = \sum_{k=1}^{n} a_ku_k$$

avec $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

A retenir :

Propriété 14 : Combinaison linéaire

Soient $(u_1, \ldots, u_n)$, n vecteurs d'un espace vectoriel E.

m est C.L. de $(u_1, \ldots, u_n)$

$\iff \quad \exists (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $m = \sum_{k=1}^{n} a_ku_k$

Exemples

- u est CL de (u, v, w) : $u = 1.u + 0.v + 0.w$
- 0_E CL de (u, v, w) : $0_E = 0.u + 0.v + 0.w$

Définition 8 : Sev engendré

L'ensemble des combinaisons linéaires de $(u_1, \ldots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par $(u_1, \ldots, u_n)$ et on le note $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$

Définition 9

On dit que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ engendre le sous espace vectoriel F (ou bien que F est engendré par $(u_1, \ldots, u_n)$) si

$$F = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$$

Propriété 15 (Résumé)

m CL de (u, v, w)

$\iff m \in Vect(u, v, w)$

$\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $m = a.u + b.v + c.w$

$\iff$ L'équation $m = a.u+b.v+c.w$ admet une solution $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

4.2 Propriétés

Propriété 16

L'ordre des vecteurs dans la famille F ne change pas l'espace vectoriel engendré.

$$\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(v, w, u)$$

Propriété 17

Soit $(u_1, ..u_n)$ une famille de vecteurs de E

$\forall k \in [[1, n]], \quad u_k \in \text{Vect}(u_1, \ldots u_n)$

Propriété 18

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

$$\text{Vect}(u_1, \ldots u_n) \subset F \iff \forall k \in [[1, n]],\ u_k \in F$$

C'est-à-dire :

$\text{Vect}(u_1, \ldots u_n)$ est le plus petit sev de E (pour l'inclusion) contenant les vecteurs $(u_1, \ldots u_n)$

Propriété 19

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles de vecteurs.

Si $\mathcal{F}$ est une sous-famille de $\mathcal{G}$,
alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset \text{Vect}(\mathcal{G})$

Propriété 20

Soient $(u_1,\ u_2,\ \dots u_n)$ une famille de vecteurs de E et $v \in E$

On a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & v \in \mathrm{Vect}(u_1,\ \dots u_n) \\ \iff \quad & \mathrm{Vect}(u_1,\ \dots u_n) = \mathrm{Vect}(u_1,\ \dots u_n,\ v) \end{aligned}$$

Propriété 21 (Généralisation)

Soient $(u_1,\ u_2,\ \dots u_n,\ v_1,\ v_2,\ \dots v_p)$, $n+p$ vecteurs de E

$$\begin{aligned} & \forall k \in [[1,p]],\ v_k \in \mathrm{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_n)] \\ \iff \quad & \mathrm{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_n) = \mathrm{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_n,\ v_1,\ \dots,\ v_p) \end{aligned}$$

Propriété 22 (Conséquence)

$\forall (a_1,\ \dots,\ a_p) \in \mathbb{K}^p$

$$\mathrm{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_p) = \mathrm{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_p,\ a_1u_1 + \cdots + a_pu_p)$$

Définition 10 : Famille génératrice

Soit E un espace vectoriel. On dit que la famille$(u_1, \dots u_n)$ est génératrice (de E) si :

$$E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots u_n)$$

Attention

Bien remarquer qu'on dit qu'une famille est génératrice si et seulement si elle engendre l'espace E tout entier.
En cas de doute sur l'espace engendré par une famille, vous vous efforcerez de le préciser.

4.3 Exemples

4.3.1 CL ou pas CL ?

$w = (1,\ 3,\ 5)$ et $w' = (3,\ 5,\ 6)$ sont-ils CL de (u, v) avec $u = (1,\ 2,\ 3)$; $v = (2,\ 3,\ 4)$?

- w est CL de $(u,\ v)$?

$\iff \exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $w = a.u + b.v$

Cherchons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{aligned} & a.u + b.v = w \\ \iff\ & a.(1,\ 2,\ 3) + b.(2,\ 3,\ 4) = (1,\ 3,\ 5) \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} a & +2b & = 1 \\ 2a & +3b & = 3 \\ 3a & +4b & = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{cases} a & +2b & = 1 \\ & -b & = 1 \\ & -2b & = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \begin{cases} a & +2b & = 1 \\ & -b & = 1 \\ & 0 & = 0 \end{cases}$$

Ce système triangulaire admet une solution $(a,\ b)$
donc il existe $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $w = a.u + b.v$
Donc w est CL de $(u,\ v)$ $\quad (\Rightarrow w \in Vect(u,\ v))$

Remarque

On peut trouver explicitement un couple $(a,\ b)$.
Ici il en existe un unique : $(a,\ b) = (3,\ -1)$ ce qui donne : $w = 3.u - v$.
Mais cela n'est pas nécessaire, il suffit simplement de *prouver l'existence* d'au moins un tel couple $(a,\ b)$.

- w' est CL de $(u,\ v)$?

Cherchons $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $w' = a.u + b.v$
Or :

$$\begin{aligned} & au + b.v = w' \\ \iff\ & a.(1,\ 2,\ 3) + b.(2,\ 3,\ 4) = (3,\ 5,\ 6) \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} a & +2b & = 3 \\ 2a & +3b & = 5 \\ 3a & +4b & = 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{cases} a & +2b & = 3 \\ & -b & = -1 \\ & -2b & = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3-2L_2 \end{matrix} \left\{\begin{array}{lll} a & +2b & =3 \\ & -b & =1 \\ & 0 & =-1 \end{array}\right.$$

Ce système est impossible.
Donc il n'existe aucun couple $(a,\ b)$ tel que $w' = a.u + b.v$
Donc w' n'est pas CL de $(u,\ v)$ $\quad \Rightarrow w' \notin Vect(u,\ v)$

4.3.2 Trouver l'équation d'un sous-espace engendré

Dans $\mathbb{R}^4$. Soient $u = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$ et $v = (1,\ 1,\ 2,\ 4)$.
Trouver l'équation de $\text{Vect}(u,\ v)$

Soit $\quad m = (x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$

$m \in \text{Vect}(u,\ v) \quad \iff \quad \exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $m = a.u + b.v$

Or $\quad m = a.u + b.v$

$\iff (x, y, z, t) = (a + b, 2a + b, 3a + 2b, 4a + 4b)$

$$\iff \left\{\begin{array}{llllll} a & +b & = & x & & \\ 2a & +b & = & & y & \\ 3a & +2b & = & & & z \\ 4a & +4b & = & & & \quad t \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \\ L_4-4L_1 \end{matrix} \left\{\begin{array}{llllll} a & +b & = & x & & \\ & -b & = & -2x & +y & \\ & -b & = & -3x & & z \\ & 0 & = & -4x & & \quad +t \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3--L_2 \\ L_4 \end{matrix} \left\{\begin{array}{lllllll} a & +b & = & x & & & \\ & -b & = & -2x & +y & & \\ & 0 & = & -x & -y & +z & \\ & 0 & = & -4x & & & +t \end{array}\right.$$

Ce système échelonné admet une solution $(a,\ b)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lllll} -x & -y & +z & =0 \\ -4x & & +t & =0 \end{array}\right.$$

$\iff \exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $m = a.u + b.v$

$\iff m \in Vect(u,\ v)$

Donc : $m \in Vect(u,\ v) \iff \left\{\begin{array}{llll} -x & -y & +z & =0 \\ -4x & & +t & =0 \end{array}\right.$

$\text{Vect}(u,\ v)$ a donc pour équation : $\left\{\begin{array}{llll} -x & -y & +z & =0 \\ -4x & & +t & =0 \end{array}\right.$

Vérification : les vecteurs u et v vérifient bien cette équation.

4.3.3 Montrer qu'une famille est génératrice

Dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $u = (1,\ 2,\ 3)$, $v = (2,\ 3,\ 4)$, $w = (1,\ 1,\ 1)$, $t = (1,\ 2,\ 4)$ est génératrice ($\iff$ engendre $\mathbb{R}^3$)

$(u,\ v,\ w,\ t)$ est génératrice $\iff \text{Vect}(u,\ v,\ w,\ t) = \mathbb{R}^3$.

Soit $\quad m = (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$.

$m = a.u + b.v + c.w + d.t$

$$\iff \left\{\begin{array}{lllllll} a & +2b & +c & +d & = & x & & \\ 2a & +3b & +c & +2d & = & & y & \\ 3a & +4b & +c & +4d & = & & & z \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \end{matrix} \left\{\begin{array}{llllllll} a & +2b & +c & +d & = & x & & \\ & -b & -c & & = & -2x & +y & \\ & -2b & -2c & +d & = & -3x & & +z \end{array}\right.$$

$$\iff L_2 \leftrightarrow L_3 \left\{\begin{array}{llllllll} a & +2b & +c & +d & = & x & & \\ & -2b & -2c & +d & = & -3x & & +z \\ & -b & -c & & = & -2x & +y & \end{array}\right.$$

Ce système échelonné admet au moins une solution $(a,\ b,\ c,\ d)$
Donc $\quad \exists (a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $m = a.u + b.v + c.w + d.t$

Donc $\quad m \in \text{Vect}(u,\ v,\ w,\ t)$

D'où : $\quad \forall m \in \mathbb{R}^3,\ m \in \text{Vect}(u,\ v,\ w,\ t)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^3 = Vect(u,\ v,\ w,\ t)$

$(u,\ v,\ w,\ t)$ est donc une famille génératrice.

4.3.4 Trouver une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.

Dans $\mathbb{R}^4$. Soit F le sous-espace vectoriel d'équation
$$\begin{cases} x & +y & -2z & +t & =0 \\ -2x & +3y & -z & -t & =0 \end{cases}.$$
Trouver une famille génératrice de F.

§ Soit $m = (x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$.

$$m \in F$$
$$\iff \begin{cases} x & +y & -2z & +t & =0 \\ -2x & +3y & -z & -t & =0 \end{cases}$$

(J'élimine x avec L_1)

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2+2L_1 \end{array} \begin{cases} x & +y & -2z & +t & =0 \\ & 5y & -5z & +t & =0 \end{cases}$$

(J'élimine t avec L_2)

$$\iff \begin{array}{l} L_1-L_2 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} x & -4y & +3z & & =0 \\ & 5y & -5z & +t & =0 \end{cases}$$

(Je peux exprimer x et t en fonction des autres inconnues) $\iff$
$$\begin{cases} x & = & 4y & -3z \\ t & = & -5y & +5z \end{cases}$$
$$\iff (x,\ y,\ z,\ t) = (4y-3z,\ y,\ z,\ -5y+5z)$$
$$= y.(4,\ 1,\ 0,\ -5) + z.(-3,\ 0,\ 1,\ 5)$$
$$= y.\vec{u} + z.\vec{v}$$
$\Rightarrow (x,\ y,\ z,\ t) \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ (Remarque : pas d'équivalence ici)

On a : $m \in F \quad \Rightarrow \quad m \in \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$
D'où $F \subset \mathrm{Vect}(u,\ v)$

§ Réciproquement :

- $u = (4,\ 1,\ 0,\ -5)$
$$x+y-2z+t = 4+1+0-5 = 0$$
$$-2x+3y-z-t = -8+3+5 = 0$$
u vérifie les équations de F, donc $u \in F$

- $v = (-3,\ 0,\ 1,\ 5)$
$$x+y-2z+t = -3+0-2+5 = 0$$
$$-2x+3y-z-t = 6+0-1-5 = 0$$
Donc $v \in F$

- $u \in F,\ v \in F$ et F sev de $\mathbb{R}^4$
Donc $\mathrm{Vect}(u, v) \subset F$

§ Conclusion : $F = \mathrm{Vect}(u,\ v)$

Donc F est engendré par la famille $(u,\ v)$ avec $u = (4,\ 1,\ 0,\ -5)$ et $v = (-3,\ 0,\ 1,\ 5)$

5 Familles libres et familles liées

Définition 11 : Famille libre

Une famille $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \dots,\ \vec{u}_n)$ de vecteurs est libre si :
$\forall (a_1,\ a_2,\ \dots\ , a_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$a_1.\vec{u}_1 + a_2.\vec{u}_2 + \cdots + a_n.\vec{u}_n = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \quad (a_1,\ a_2,\ \dots\ , a_n) = (0,\ 0,\ \dots,\ 0)$$
On dit aussi que les vecteurs $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \dots,\ \vec{u}_n)$ sont (linéairement) indépendants.

Définition 12 : Famille liée

Une famille est liée si et seulement si elle n'est pas libre

D'où :
$$(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \dots,\ \vec{u}_n) \text{ est liée}$$
$$\iff \exists (a_1,\ a_2,\ \dots\ , a_n) \in \mathbb{R}^n,$$
$$a_1.\vec{u}_1 + a_2.\vec{u}_2 + \cdots + a_n.\vec{u}_n = \vec{0}$$
$$\text{et} \qquad (a_1,\ a_2,\ \dots\ , a_n) \neq (0,\ 0,\ \dots,\ 0)$$

En d'autres termes :

Propriété 23 : Libre, liée, équation

- $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ libre
  $\iff$ l'équation $a.\vec{u}+b.\vec{v}+c.\vec{w}=\vec{0}$
  admet pour unique solution $(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$
- $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ liée
  $\iff$ l'équation $a.\vec{u}+b.\vec{v}+c.\vec{w}=\vec{0}$
  admet une solution non nulle $(a,\ b,\ c)\neq(0,\ 0,\ 0)$

5.1 Exemples

Famille libre

$E=\mathbb{R}^4$. $u=(1,\ 2,\ 3,\ 4); v=(2,\ 3,\ 4,\ 6); w=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$

Montrer que $(u,\ v,\ w)$ est une famille libre.

Soit $(a,\ b,\ c)\in\mathbb{R}^3$

$$au+bv+cw=\vec{0}$$

$$\iff (a+2b+c,\ 2a+3b+c,\ 3a+4b+c,\ 4a+6b+c)=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} a & +2b & +c & =0\\ 2a & +3b & +c & =0\\ 3a & +4b & +c & =0\\ 4a & +6b & +c & =0\end{array}\right. \iff \begin{array}{l} L_1\\ L_2-2L_1\\ L_3-3L_1\\ L_4-4L_1\end{array}\left\{\begin{array}{rrrl} a & +2b & +c & =0\\ & -b & -c & =0\\ & +-2b & -2c & =0\\ & -2b & -3c & =0\end{array}\right.$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1\\ L_2\\ L_3-2L_2\\ L_4-2L_2\end{array}\left\{\begin{array}{rrrl} a & +2b & +c & =0\\ & -b & -c & =0\\ & & 0 & =0\\ & & -c & =0\end{array}\right.$$

Système traingulaire homogène.
Donc $(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$

Donc $(u,\ v,\ w)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

Famille liée

$u=(1,1,2,2),\ v=(2,3,5,3),\ w=(3,1,4,8)$
La famille $(u,\ v,\ w)$ est-elle libre ?

Soit $(a,\ b,\ c)\in\mathbb{R}^3$.

$$au+bv+cw=\vec{0}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} a & +2b & +3c & =0\\ a & +3b & +c & =0\\ 2a & +5b & 4cc & =0\\ 2a & +3b & 8c & =0\end{array}\right. \iff \begin{array}{l} L_1-2L_2\\ L_2\\ L_3-L_2\\ L_4+L_2\end{array}\left\{\begin{array}{rrrl} a & +2b & +3c & =0\\ & b & -2c & =0\\ & & 0 & =0\\ & & 0 & =0\end{array}\right.$$

Ce système échelonné admet au moins une solution non nulle.
Donc $(u,\ v,\ w)$ est donc liée

Par exemple, pour $c=1$, on obtient : $(a,\ b,\ c)=(-7,\ 2,\ 1)$
Donc : $-7u+2v+w=0$ (Vérifier que cela marche !)

5.2 Propriétés

Propriété 24 : Libre et identification des coefficients

Soit $(u_1,\ \dots u_n)$ une famille libre de E

Alors $\forall(a_1,\ \dots,\ a_n)\in\mathbb{K}^n,\ \forall(b_1,\ \dots,\ b_n)\in\mathbb{K}^n$

$$a_1u_1+\cdots+a_nu_n=b_1u_1+\cdots+b_nu_n$$

$\Rightarrow$ $(a_1,\ \dots,\ a_n)=(b_1,\ \dots,\ b_n)$

Propriété 25

1) Une famille contenant le vecteur nul est lié
2) Une famille contenant deux vecteurs identiques est liée.
3) (u) est libre $\iff$ $u\neq\vec{0}$

Propriété 26 : Deux vecteurs liés

(u,v) est liée

$\iff$ $\exists k\in\mathbb{R}$ tel que $v=k.u$ ou $u=k.v$

$\iff$ u et v sont colinéaires (ou proportionnels)

Propriété 27

Une famille est liée
$\iff$ L'un des vecteurs est C.L. des autres.

Attention : on ne peut pas dire a priori lequel sera CL des autres.

Ce que précise la propriété suivante

Propriété 28

Si $(u_1,\ \dots u_n)$ libre

Alors $(u_1,\ \dots u_n,\ v)$ liée $\iff$ v CL de $(u_1,\ \dots u_n)$

Propriété 29

* $(u,\ v)$ liée $\Rightarrow (u,\ v,\ w)$ liée

par contraposée :

* $(u,\ v,\ w)$ libre $\Rightarrow (u,\ v)$ libre

généralisation :

* Toute sur-famille d'une famille liée est liée

* Toute sous-famille d'une famille libre est libre

6 Base

Définition 13 : Bases

Soit E un espace vectoriel.

Une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de E est une base de E

$\iff$ $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice.

Définition 14 : Base d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Une famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \dots,\ \vec{u}_n)$ de vecteurs de E est une base de F si

- $\mathcal{F}$ est libre
- $\mathcal{F}$ engendre F (c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = F$

Propriété 30 : Conséquence : base d'un sev engendré

Soit $(u,\ v,\ w)$ une famille de vecteurs de E

Alors

$(u,\ v,\ w)$ est une base de $\mathrm{Vect}(u,\ v,\ w)$

$\iff$ $(u,\ v,\ w)$ est libre

7 Somme de sous-espaces vectoriels

7.1 Somme de deux sev

Définition 15 : somme de deux sev

Soient F et G deux sev de E

On note $F + G = \{u + v/(u, v) \in F \times G\}$

Ou encore

$$\boxed{\forall w \in E,\quad w \in F + G \iff \exists (u,\ v) \in F \times G,\ w = u + v}$$

Propriété 31 : somme de deux sev

Soient F et G deux sev de E

Alors $F + G$ est un sev de E

Propriété 32

Soient F , G et H trois sous-espaces de E

$[F + G \subset H] \iff [F \subset H$ et $G \subset H]$

Propriété 33 : Conséquence

$F + G$ est le plus petit sev de E contenant F et G

Propriété 34 : Famille génératrice d'un somme

Soint $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux familles de vecteurs de E

Alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) + \mathrm{Vect}\mathcal{V} = \mathrm{Vect}(\mathcal{U},\ \mathcal{U})$

7.2 Somme directe

Définition 16 : Somme directe de 2 sev

Soient $F,\ G$ deux sous-espaces vectoriels de E

Alors la somme $F + G$ est dite **directe** si et seulement si

$$\forall u \in F + G,\ \exists!(v,\ w) \in F \times G,\ u = v + w$$

Dans ce cas, la somme est notée $F \oplus G$

(On dit aussi de F et G sont en somme directe)

Propriété 35 : Caractérisation de la somme directe

Deux sev F et G de E sont en somme directe si et seulement si

$F \cap G = \{\vec{0}\}$

Remarque :

Écrire $F = G \oplus H$ signifie en fait deux choses simultanément :

$$F = G \oplus H \iff \begin{cases} F = G + H \\ F, G \text{ sont en somme directe} \end{cases}$$

Propriété 36

Soient F, G, H trois sev de E. Alors

$$F \oplus G = H$$
$$\iff \begin{cases} F \subset H,\ G \subset H \\ \forall w \in H,\ \exists!(u,v) \in F \times G,\ w = u + v \end{cases}$$

Remarque 1

- Pour montrer que deux sev F et G sont en somme directe, on montre simplement que $F \cap G = \{0\}$
- Pour montrer que sev sont en somme directe et que leur somme est H, alors on utilise plutôt cette dernière propriété

Remarque 2 Ne pas oublier de montrer que $F \subset H$ et $G \subset H$

Remarque 3 Pour montrer

$$\forall w \in H,\ \exists!(u,v) \in F \times G,\ w = u + v$$

on procède le plus souvent par analyse-synthèse

Propriété 37 : Base d'une sommes directe

Soient deux sev $F,\ G$ de $E,\ \mathcal{U}$ une base de F et $\mathcal{V}$ une base de G

Alors F et G sont en somme directe si et seulement si $(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ une base de $F + G$

Définition 17 : Supplémentaire

Soit F et G deux sev de E
On dit que F et G sont deux sev supplémentaires si $E = F \oplus G$

Propriété 38 : Caractérisation de sev supplémentaires

Deux sev F et G de E sont supplémentaires si et seulement si

$$\forall u \in E,\ \exists!(v,w) \in F \times G,\ u = v + w$$