

1 Espace vectoriel

Définition 1 : Loi interne

Soit E un ensemble. Une loi de composition interne (l.c.i.) de E est une application de $E \times E$ dans E .

A un couple d'éléments de E , elle associe donc un élément de E .

Si on la note \oplus , on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \oplus y \in E$$

Exemples

- L'addition, la soustraction, la multiplication dans \mathbb{R}
- L'addition, la multiplication des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- La composée des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Comme \oplus est une application, il y a unicité de l'image.

Donc $(a, b) = (a', b') \Rightarrow a + b = a' + b'$

En particulier on a :

Propriété 1

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne

\oplus

Alors $\forall (a, b, c) \in E^3$

$$a = b \Rightarrow a \oplus c = b \oplus c$$

$$a = b \Rightarrow c \oplus a = c \oplus a$$

Dans une égalité on peut composer à droite ou bien à gauche

Définition 2 : Loi externe

Soit E et K deux ensembles. Une loi de composition externe sur E à opérateurs dans K est une application de $K \times E$ dans E .

Si on la note \otimes , on a : $\forall (\lambda, x) \in K \times E, \quad \lambda \otimes x \in E$

Exemples :

- L'élevation à la puissance des réels strictement positifs par les entiers : $[\mathbb{N} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, (n, x) \mapsto x^n]$
- La multiplication d'une fonction par un réel.

\mathbb{K} sera dans tout ce qui suit l'ensemble \mathbb{R} ou bien l'ensemble \mathbb{C} ou bien plus rarement \mathbb{Q}

Définition 3 : Espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne notée « + » et d'une loi externe à opérateurs dans \mathbb{K} notée « . »

$(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel s'il vérifie les propriétés suivantes

A1 : $\forall (u, v, w) \in E^3, \quad (u + v) + w = u + (v + w)$ (Associativité)

A2 : $\exists u_0 \in E, \forall u \in E, \quad u + u_0 = u_0 + u = u$ (Existence d'un élément neutre)

A3 : $\forall u \in E, \exists u' \in E, \quad u + u' = u' + u = u_0$ (Existence d'un symétrique)

A4 : $\forall (u, v) \in E^2, \quad u + v = v + u$ (Commutativité)

M1 : $\forall a \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2, \quad a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$

M2 : $\forall (a, b) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, \quad (a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$

M3 : $\forall (a, b) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, \quad (ab) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)$

M4 : $\forall u \in E, \quad 1 \cdot u = u$

2 Propriétés élémentaires

Propriété 2 : élément neutre

L'élément neutre u_0 est unique.

Il est noté $\vec{0}_E$, ou plus simplement $\vec{0}$ et est nommé « le vecteur nul de E »

Démonstration

Soient 2 vecteurs nuls u_0 et v_0

$$\forall u \in E, \quad u + u_0 = u_0 + u = u$$

Donc, en particulier, pour $u = v_0$, on obtient :

$$v_0 + u_0 = u_0 + v_0 = v_0 \quad (1)$$

D'autre part, v_0 est un vecteur nul, donc :

$$\forall u \in E, \quad u + v_0 = v_0 + u = u$$

En particulier, pour $u = u_0$, on obtient :

$$u_0 + v_0 = v_0 + u_0 = u_0 \quad (2)$$

On a donc, d'après (1) et (2) :

$$u_0 + v_0 = v_0 \quad \text{et} \quad u_0 + v_0 = u_0$$

D'où : $v_0 = u_0$.

Ce qui prouve l'unicité du vecteur nul de E

On obtient donc : $\forall u \in E, \quad u + \vec{0} = \vec{0} + u = u$ *fin demo*

Propriété 3 : symétrique

|| Chaque vecteur u admet un unique symétrique qui sera noté $-u$.

u admet un unique symétrique dans E . On l'appelle donc le symétrique de u .

Et on a : $\forall u \in E, \quad u + (-u) = (-u) + u = 0$

Démonstration

Soient $u \in E$ et u' et u'' deux symétriques de u .

On a donc : $u + u' = u' + u = \vec{0}$ et $u + u'' = u'' + u = \vec{0}$

On a alors d'une part :

$$u'' + (u + u') = u'' + \vec{0} = u$$

d'autre part

$$\begin{aligned} & u'' + (u + u') \\ &= (u'' + u) + u' \quad (+\text{associative}) \\ &= \vec{0} + u' = u' \end{aligned}$$

Donc $u' = u''$ CQFD

u admet donc bien un unique symétrique dans E . On l'appelle donc le symétrique de u . *fin demo*

Propriété 4 : Simplification

$$\| \forall (u, v, w) \in E^3, \quad u + v = u + w \iff v + u = w + u \iff v = w$$

Démonstration

Soit $(u, v, w) \in E^3$

$$u + v = u + w$$

$\Rightarrow v + u = w + u$ car $+$ est commutative

$\Rightarrow (v + u) + (-u) = (w + u) + (-u)$ en additionnant $-u$ à droite)

$\Rightarrow v + (u + -u) = w + (u + -u)$ ($+$ est associative)

$\Rightarrow v + 0 = w + 0$

$\Rightarrow v = w$

$\Rightarrow u + v = u + w$

Donc tout est bien équivalent. *fin demo*

Propriété 5 : Simplification

$$\| \forall (u, v) \in E^2, \quad u + v = v \iff v + u = v \iff u = 0$$

Démonstration

Il suffit d'écrire $u + v = v \iff u + v = \vec{0} + v$

et d'utiliser ce qui précède (simplification par v) *fin demo*

Propriété 6

$$\| \forall (u, v) \in E^2, \quad u + v = 0 \iff v + u = 0 \iff v = -u$$

Démonstration Découle de l'unicité du symétrique *fin demo*

Définition 4 : Notation

| On note $u + (-v) = u - v$

Lemme

$$\| \begin{aligned} & \forall a \in \mathbb{K}, \quad a \cdot \vec{0} = \vec{0} \\ & \forall u \in E, \quad 0 \cdot u = u \end{aligned}$$

Démonstration

• Soit $a \in \mathbb{K}$

$$a \cdot \vec{0} + a \cdot \vec{0} = a(\vec{0} + \vec{0}) = a \cdot \vec{0}$$

Donc $a \cdot \vec{0} = \vec{0}$

• Soit $u \in E$,

$$0 \cdot u + 0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u$$

$\Rightarrow 0 \cdot u = 0$ *fin demo*

Propriété 7

$$\| \forall (a, u) \in \mathbb{K} \times E, \quad [a \cdot u = 0] \iff [a = 0 \text{ ou } u = \vec{0}]$$

Démonstration

⇒ Supposons $a.u = \vec{0}$

- Si $a = 0$ Gagné
- Si $a \neq 0$, alors on peut multiplier par a^{-1}

$$a.u = 0$$

$$\Rightarrow a^{-1}.(a.u) = a^{-1}.\vec{0}$$

$$\Rightarrow (a^{-1}.a).u = \vec{0} \text{ d'après le lemme}$$

$$\Rightarrow 1.u = \vec{0}$$

$$\Rightarrow u = \vec{0} \text{ Gagné}$$

⇐ Découle du lemme

fin demo

Propriété 8

$$\| \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, (-1).u = -u \text{ et } (-a).u = a.(-u) = -(a.u)$$

Démonstration

- $u + (-1).u = 1.u + (-1).u = (1 + (-1)).u = 0.u = \vec{0}$
 $u + (-1).u = 0 \Rightarrow (-1).u = -u$
- $(-a).u + (a.u) = (-a + a).u = 0.u = \vec{0}$
 $(-a).u + (a.u) = \vec{0} \Rightarrow (-a).u = -(a.u)$
- $a.(-u) + a.u = a.(-u + u) = a.0 = \vec{0}$
 $a.(-u) + a.u = \vec{0} \Rightarrow a.(-u) = -(a.u)$

fin demo

Propriété 9

$$\| \forall (a, b) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in E^2, (a + b).(u + v) = a.u + a.v + b.u + b.v$$

Propriété 10 (Généralisation)

$$\left\| \begin{array}{l} \forall (a_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n, \forall (u_k)_{1 \leq k \leq p} \in E^n, \\ \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^p u_k \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_i.u_j \end{array} \right.$$

Évitez de confondre le **vecteur nul** $\vec{0}$ et le **réel** 0.

2.1 Exemples d'espaces vectoriels

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$. Exemple de \mathbb{R}^3 :

$$\text{addition : } (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$\text{multiplication : } a.(x, y, z) = (ax, ay, az)$$

$$\text{vecteur nul : } (0, 0, 0)$$

- $\mathbb{R}[X]$: l'ensemble des polynômes. Le vecteur nul est le polynôme nul.
- L'ensemble des applications de A dans \mathbb{R} . Le vecteur nul est l'application nulle $\vec{0}$ telle que : $\forall x \in A, \vec{0}(x) = 0$
- L'ensemble des suites à valeurs dans \mathbb{R} . Le vecteur nul est la suite nulle $\vec{0} = (\vec{0}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \vec{0}_n = 0$
 Cette suite nulle est aussi notée (0)

3 Sous-espace vectoriel**3.1 Définitions****Définition 5 : sev (celle dont on se sert)**

Soit E un espace vectoriel.

F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si :

- $F \subset E$
- $\vec{0}_E \in F$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in F^2, a.u + b.v \in F$

Propriété 11 : sev

Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel.

Propriété 12 : Stabilité par CL

Soit F un sev de E . Alors :

$$\left\| \forall (u_1, \dots, u_n) \in F^n, \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^n a_k u_k \in F \right.$$

Propriété 13 : intersection

L'intersection de n sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E .

Remarque

Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel plus grand. Donc toutes les propriétés et définitions qui s'appliquent à un espace vectoriel s'appliqueront de même à un sous-espace vectoriel.

3.2 Principaux exemples de sous espaces vectoriels

- $\{\vec{0}\}$ est un sev de E .
- E est un sous-espace vectoriel de E .
- $C^0(\mathbb{R}), C^1(\mathbb{R}), C^2(\mathbb{R}), \dots, C^n(\mathbb{R}), \dots, C^\infty(\mathbb{R})$ sont des sous espaces vectoriels de l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
($C^n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} n fois dérivables et dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ est continue et $C^\infty(\mathbb{R})$ est l'ensemble des applications dérivables à tous les ordres)
- $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n , est un sous espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X]$.

3.3 Exemples

- Exemple 1

$F = \{(x, y, z) / x + 2y + z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}$ est-il un sev de \mathbb{R}^3 ?

- $F \subset \mathbb{R}^3$
- $(0, 0, 0) \in F$.
- Stabilité par combinaison linéaire
Soient $(u, v) \in F^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On pose $u = (x, y, z)$ $v = (x', y', z')$.
Montrons que $a.u + b.v \in F$.
Posons $w = au + b.v = (X, Y, Z)$
 $w = a.u + b.v = a.(x, y, z) + b.(x', y', z') = (ax + bx', ay + by', az + bz')$
 $X + 2Y + Z = (ax + bx') + 2(ay + by') + (az + bz')$
 $= a \underbrace{(x + 2y + z)}_{=0 \text{ car } u \in F} + b \underbrace{(x' + 2y' + z')}_{=0 \text{ car } v \in F}$
 $= 0$

On a de même :

$$\begin{aligned} X - Y - Z &= (ax + bx') - (ay + by') - (az + bz') \\ &= a.(x - y - z) + b.(x' - y' - z') \\ &= a.0 + b.0 \quad (\text{car } (u, v) \in F^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X + 2Y + Z &= 0 \quad \text{et} \quad X - Y - Z = 0 \\ \Rightarrow w &= (X, Y, Z) \in F \\ \text{Donc } a.u + b.v &\in F. \end{aligned}$$

- Conclusion F est donc bien un sous-espace de \mathbb{R}^3 .

- Exemple 2

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0 \text{ ou } x - y - z = 0\}$ est-il un sev de \mathbb{R}^3 ?

F n'est pas stable pour l'addition. En effet, $u = (-2, 1, 0) \in F$ (1ere équation) et $v = (1, 1, 0) \in F$. (2ème eq.)

Par contre $u + v = (-1, 2, 0) \notin F$

Donc F n'est pas un sev de \mathbb{R}^3

4 Combinaisons linéaires et famille génératrice

4.1 Définitions

Définition 6 : Familles de vecteurs

Soit I un ensemble (fini ou non).

On appelle famille de vecteurs tout suite de vecteurs $(u_i)_{i \in I}$ indexée par I

Une famille de n vecteurs est notée en général (u_1, u_2, \dots, u_n) ou $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$

On dit que $\mathcal{F} = (u_k)_{k \in I}$ est une **sous-famille** de $\mathcal{G} = (u_k)_{k \in J}$ et que \mathcal{G} est une **sur-famille** de \mathcal{F} si $I \subset J$ c'est-à-dire si \mathcal{G} est obtenue en « ajoutant » des vecteurs de E à la famille \mathcal{F} .

Exemples :

- (u) est une sous-famille de (u, v) qui est une sous-famille de (u, v, u)
Remarque : on peut a priori répéter plusieurs fois le même vecteur dans une famille.
- (\emptyset) la famille vide est considérée comme une sous-famille de toutes les autres familles.

Définition 7 : Combinaison linéaire

Soient (u_1, \dots, u_n) , n vecteurs d'un espace vectoriel E .

On appelle combinaison linéaire des vecteurs (u_1, \dots, u_n) tout vecteur de la forme

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = \sum_{k=1}^n a_ku_k$$

avec $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

A retenir :

Propriété 14 : Combinaison linéaire

Soient (u_1, \dots, u_n) , n vecteurs d'un espace vectoriel E .

m est C.L. de (u_1, \dots, u_n)

$$\iff \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } m = \sum_{k=1}^n a_ku_k$$

Exemples

- u est CL de (u, v, w) : $u = 1.u + 0.v + 0.w$
- 0_E CL de (u, v, w) : $0_E = 0.u + 0.v + 0.w$

Définition 8 : Sev engendré

L'ensemble des combinaisons linéaires de (u_1, \dots, u_n) est un sous-espace vectoriel de E .

On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, \dots, u_n) et on le note $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$

Définition 9

On dit que la famille (u_1, \dots, u_n) engendre le sous espace vectoriel F (ou bien que F est engendré par (u_1, \dots, u_n)) si

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$$

Propriété 15 (Résumé)

$$\begin{aligned} & m \text{ CL de } (u, v, w) \\ \iff & m \in \text{Vect}(u, v, w) \\ \iff & \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } m = a.u + b.v + c.w \\ \iff & \text{L'équation } m = a.u + b.v + c.w \text{ admet une solution } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

4.2 Propriétés

Propriété 16

L'ordre des vecteurs dans la famille F ne change pas l'espace vectoriel engendré.

$$\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(v, w, u)$$

Propriété 17

Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E

$$\forall k \in [[1, n]], u_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$$

Démonstration

Soit $k \in [[1, n]]$

Prenons $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_p) = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$

$$\begin{aligned} a_1.u_1 + a_2.u_2 + \dots + a_k.u_k + \dots + a_n.u_n &= 0.u_1 + 0.u_2 + \dots + 1.u_k + \dots + 0.u_n \\ &= u_k \end{aligned}$$

Donc $u_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ *fin demo*

Propriété 18

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset F \iff \forall k \in [[1, n]], u_k \in F$$

C'est-à-dire :

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est le plus petit sev de E (pour l'inclusion) contenant les vecteurs (u_1, \dots, u_n)

Démonstration

$\Rightarrow u_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ et $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset F$
 $\Rightarrow u_k \in F$
 \Leftarrow Soit $w \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$
 $\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que
 $w = a_1.u_1 + a_2.u_2 + \dots + a_k.u_k + \dots + a_n.u_n$
 Or $u_1 \in F, \dots, u_n \in F$ et F est un sev donc stable par C.L.
 Donc $a_1.u_1 + a_2.u_2 + \dots + a_k.u_k + \dots + a_n.u_n \in F$
 $\Rightarrow w \in F$
 D'où : $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \in F$

fin demo $u_1 \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$

...

 $u_n \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ $v_1 \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$

...

 $v_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ Donc $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p) \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ On a donc $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p)$ \Leftarrow Supposons $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p)$ $\forall k \in [[1, p]], v_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p)$ Or $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p)$ $\Rightarrow v_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ *fin demo***Propriété 19**

|| Soit \mathcal{F} et \mathcal{G} deux familles de vecteurs.
 || Si \mathcal{F} est une sous-famille de \mathcal{G} ,
 || alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset \text{Vect}(\mathcal{G})$

Propriété 20

|| Soient (u_1, u_2, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E et $v \in E$
 || On a l'équivalence suivante :
 || $v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$
 || $\iff \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v)$

Propriété 21 (Généralisation)

|| Soient $(u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_p)$, $n + p$ vecteurs de E
 || $\forall k \in [[1, p]], v_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$
 || $\iff \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p)$

Démonstration \Rightarrow supposons $\forall k \in [[1, p]], v_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$

D'une part

 (u_1, \dots, u_n) est une sous-famille de $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p)$ Donc $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p)$

D'autre part

Propriété 22 (Conséquence)

|| $\forall (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p$
 || $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, a_1 u_1 + \dots + a_p u_p)$

Définition 10 : Famille génératrice

|| Soit E un espace vectoriel. On dit que la famille (u_1, \dots, u_n) est génératrice (de E) si :

$$E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$$

Attention

Bien remarquer qu'on dit qu'une famille est génératrice si et seulement si elle engendre l'espace E tout entier.

En cas de doute sur l'espace engendré par une famille, vous vous efforcerez de le préciser.

4.3 Exemples**4.3.1 CL ou pas CL ?**

$w = (1, 3, 5)$ et $w' = (3, 5, 6)$ sont-ils CL de (u, v) avec $u = (1, 2, 3)$; $v = (2, 3, 4)$?

- w est CL de (u, v) ?

$$\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } w = a.u + b.v$$

Cherchons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$a.u + b.v = w$$

$$\iff a.(1, 2, 3) + b.(2, 3, 4) = (1, 3, 5)$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + 3b = 3 \\ 3a + 4b = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{cases} a + 2b = 1 \\ -b = 1 \\ -2b = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \begin{cases} a + 2b = 1 \\ -b = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ce système triangulaire admet une solution (a, b) donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $w = a.u + b.v$
Donc w est CL de (u, v) ($\Rightarrow w \in Vect(u, v)$)

Remarque

On peut trouver explicitement un couple (a, b) .
Ici il en existe un unique : $(a, b) = (3, -1)$ ce qui donne : $w = 3.u - v$.
Mais cela n'est pas nécessaire, il suffit simplement de *prouver l'existence* d'au moins un tel couple (a, b) .

- w' est CL de (u, v) ?

Cherchons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $w' = a.u + b.v$

Or :

$$a.u + b.v = w'$$

$$\iff a.(1, 2, 3) + b.(2, 3, 4) = (3, 5, 6)$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b = 3 \\ 2a + 3b = 5 \\ 3a + 4b = 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{cases} a + 2b = 3 \\ -b = -1 \\ -2b = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \begin{cases} a + 2b = 3 \\ -b = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

Ce système est impossible.

Donc il n'existe aucun couple (a, b) tel que $w' = a.u + b.v$

Donc w' n'est pas CL de (u, v) $\Rightarrow w' \notin Vect(u, v)$

4.3.2 Trouver l'équation d'un sous-espace engendré

Dans \mathbb{R}^4 . Soient $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, 1, 2, 4)$.
Trouver l'équation de $Vect(u, v)$

Soit $m = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$m \in Vect(u, v) \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } m = a.u + b.v$$

Or $m = a.u + b.v$

$$\iff (x, y, z, t) = (a + b, 2a + b, 3a + 2b, 4a + 4b)$$

$$\iff \begin{cases} a + b = x \\ 2a + b = y \\ 3a + 2b = z \\ 4a + 4b = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \\ L_4 - 4L_1 \end{array} \begin{cases} a + b = x \\ -b = -2x + y \\ -b = -3x + z \\ 0 = -4x + t \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 \end{array} \begin{cases} a + b = x \\ -b = -2x + y \\ 0 = -x - y + z \\ 0 = -4x + t \end{cases}$$

Ce système échelonné admet une solution (a, b) si et seulement si

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -4x + t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } m = a.u + b.v$$

$$\iff m \in Vect(u, v)$$

$$\text{Donc : } m \in \text{Vect}(u, v) \iff \begin{cases} -x & -y & +z & = 0 \\ -4x & & +t & = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vect}(u, v) \text{ a donc pour équation : } \begin{cases} -x & -y & +z & = 0 \\ -4x & & +t & = 0 \end{cases}$$

Vérification : les vecteurs u et v vérifient bien cette équation.

4.3.3 Montrer qu'une famille est génératrice

Dans \mathbb{R}^3 . Montrer que la famille $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 3, 4)$, $w = (1, 1, 1)$, $t = (1, 2, 4)$ est génératrice (\iff engendre \mathbb{R}^3)

(u, v, w, t) est génératrice $\iff \text{Vect}(u, v, w, t) = \mathbb{R}^3$.

Soit $m = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} m &= a.u + b.v + c.w + d.t \\ \iff \begin{cases} a & +2b & +c & +d & = & x \\ 2a & +3b & +c & +2d & = & y \\ 3a & +4b & +c & +4d & = & z \end{cases} \\ \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} a & +2b & +c & +d & = & x \\ & -b & -c & & = & -2x + y \\ & -2b & -2c & +d & = & -3x + z \end{cases} \\ \iff \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \end{matrix} \begin{cases} a & +2b & +c & +d & = & x \\ & -2b & -2c & +d & = & -3x + z \\ & -b & -c & & = & -2x + y \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système échelonné admet au moins une solution (a, b, c, d)

Donc $\exists(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $m = a.u + b.v + c.w + d.t$

Donc $m \in \text{Vect}(u, v, w, t)$

D'où : $\forall m \in \mathbb{R}^3, m \in \text{Vect}(u, v, w, t)$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = \text{Vect}(u, v, w, t)$

(u, v, w, t) est donc une famille génératrice.

4.3.4 Trouver une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.

Dans \mathbb{R}^4 . Soit F le sous-espace vectoriel d'équation

$$\begin{cases} x & +y & -2z & +t & = 0 \\ -2x & +3y & -z & -t & = 0 \end{cases}$$

Trouver une famille génératrice de F .

§ Soit $m = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} m &\in F \\ \iff \begin{cases} x & +y & -2z & +t & = 0 \\ -2x & +3y & -z & -t & = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(J'élimine x avec L_1)

$$\iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x & +y & -2z & +t & = 0 \\ & 5y & -5z & +t & = 0 \end{cases}$$

(J'élimine t avec L_2)

$$\iff \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x & -4y & +3z & & = 0 \\ & 5y & -5z & +t & = 0 \end{cases}$$

(Je peux exprimer x et t en fonction des autres inconnues) \iff

$$\begin{cases} x & = & 4y & -3z \\ t & = & -5y & +5z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iff (x, y, z, t) &= (4y - 3z, y, z, -5y + 5z) \\ &= y \cdot (4, 1, 0, -5) + z \cdot (-3, 0, 1, 5) \\ &= y \cdot \vec{u} + z \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x, y, z, t) \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ (Remarque : pas d'équivalence ici)

On a : $m \in F \Rightarrow m \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$

D'où $F \subset \text{Vect}(u, v)$

§ Réciproquement :

• $u = (4, 1, 0, -5)$

$$x + y - 2z + t = 4 + 1 + 0 - 5 = 0$$

$$-2x + 3y - z - t = -8 + 3 + 5 = 0$$

u vérifie les équations de F , donc $u \in F$

- $v = (-3, 0, 1, 5)$

$$x + y - 2z + t = -3 + 0 - 2 + 5 = 0$$

$$-2x + 3y - z - t = 6 + 0 - 1 - 5 = 0$$

Donc $v \in F$

- $u \in F, v \in F$ et F sev de \mathbb{R}^4
Donc $\text{Vect}(u, v) \subset F$

§ Conclusion : $F = \text{Vect}(u, v)$

Donc F est engendré par la famille (u, v) avec $u = (4, 1, 0, -5)$ et $v = (-3, 0, 1, 5)$

5 Familles libres et familles liées

Définition 11 : Famille libre

Une famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ de vecteurs est libre si :

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

On dit aussi que les vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ sont (linéairement) indépendants.

Définition 12 : Famille liée

Une famille est liée si et seulement si elle n'est pas libre

D'où :

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) \text{ est liée}$$

$$\iff \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

En d'autres termes :

Propriété 23 : Libre, liée, équation

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ libre
 \iff l'équation $a \vec{u} + b \vec{v} + c \vec{w} = \vec{0}$
admet pour unique solution $(a, b, c) = (0, 0, 0)$
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ liée
 \iff l'équation $a \vec{u} + b \vec{v} + c \vec{w} = \vec{0}$
admet une solution non nulle $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

5.1 Exemples

Famille libre

$E = \mathbb{R}^4. u = (1, 2, 3, 4); v = (2, 3, 4, 6); w = (1, 1, 1, 1)$
Montrer que (u, v, w) est une famille libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$au + bv + cw = \vec{0}$$

$$\iff (a + 2b + c, 2a + 3b + c, 3a + 4b + c, 4a + 6b + c) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \\ 3a + 4b + c = 0 \\ 4a + 6b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \\ L_4 - 4L_1 \end{matrix} \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -b - c = 0 \\ + -2b - 2c = 0 \\ -2b - 3c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -b - c = 0 \\ 0 = 0 \\ -c = 0 \end{cases}$$

Système triangulaire homogène.

Donc $(a, b, c) = (0, 0, 0)$

Donc (u, v, w) est une famille libre de \mathbb{R}^4 .

Famille liée

$u = (1, 1, 2, 2), v = (2, 3, 5, 3), w = (3, 1, 4, 8)$
La famille (u, v, w) est-elle libre ?

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$au + bv + cw = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ a + 3b + c = 0 \\ 2a + 5b + 4c = 0 \\ 2a + 3b + 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ce système échelonné admet au moins une solution non nulle.
Donc (u, v, w) est donc liée

Par exemple, pour $c = 1$, on obtient : $(a, b, c) = (-7, 2, 1)$
Donc : $-7u + 2v + w = 0$ (Vérifier que cela marche !)

5.2 Propriétés

Propriété 24 : Libre et identification des coefficients

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } (u_1, \dots, u_n) \text{ une famille libre de } E \\ \text{Alors } \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n \\ a_1u_1 + \dots + a_nu_n = b_1u_1 + \dots + b_nu_n \\ \Rightarrow (a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \end{array} \right.$$

Démonstration Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} \text{tels que } & a_1u_1 + \dots + a_nu_n = b_1u_1 + \dots + b_nu_n \\ \Rightarrow & (a_1 - b_1)u_1 + \dots + (a_n - b_n)u_n = \vec{0} \text{ Or } (u_1, \dots, u_n) \text{ est libre. Donc} \\ & (a_1 - b_1) = \dots = a_n - b_n = 0 \\ \Rightarrow & (a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \qquad \textit{fin demo} \end{aligned}$$

Propriété 25

$$\left\| \begin{array}{l} 1) \text{ Une famille contenant le vecteur nul est lié} \\ 2) \text{ Une famille contenant deux vecteurs identiques est liée.} \\ 3) (u) \text{ est libre } \Leftrightarrow u \neq \vec{0} \end{array} \right.$$

Démonstration

1) Prenons par exemple (u, v, w) avec $u = 0$
Alors $1.u + 0.v + 0.w = 0$ avec $(1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$
Donc (u, v, w) est liée.

2) Prenons par exemple (u, v, w) avec $u = w$
Alors $1.u + 0.v + (-1).w = 0$ avec $(1, 0, -1) \neq (0, 0, 0)$
Donc (u, v, w) est liée.

3) $u = \vec{0} \Rightarrow (u)$ liée : C'est vrai d'après 1)

Supposons maintenant (u) liée
 $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ tel que $a.u = \vec{0}$ et $a \neq 0$
Donc $u = \frac{1}{a}\vec{0} = \vec{0}$

On a donc (u) liée $\Rightarrow u = \vec{0}$

fin demo

Propriété 26 : Deux vecteurs liés

$$\left\| \begin{array}{l} (u, v) \text{ est liée} \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } v = k.u \text{ ou } u = k.v \\ \Leftrightarrow u \text{ et } v \text{ sont colinéaires (ou proportionnels)} \end{array} \right.$$

Démonstration

\Rightarrow Supposons (u, v) liée
Alors $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a.u + b.v = \vec{0}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$
Deux cas : $b = 0$ ou $b \neq 0$

- 1er cas : $b = 0$
Alors $a \neq 0$ car $(a, b) \neq (0, 0)$
On a alors : $a.u + b.v = a.u = \vec{0} \Rightarrow u = \vec{0}$ car $a \neq 0$
 $\Rightarrow u = k.v$ avec $k = 0$
- 2ème cas : $b \neq 0$
Alors $a.u + b.v = \vec{0} \Rightarrow b.v = -a.u \Rightarrow v = -(a/b).u$ (car $b \neq 0$)
 $\Rightarrow v = k.u$ avec $k = -a/b$

Dans les deux cas, on a bien : $u = k.v$ ou $v = k.u$. CQFD

\Leftarrow Ssupposons qu'il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $u = k.v$ ou $v = k.u$

- 1er cas : si $u = k.v$
 $\Rightarrow 1.u + (-k).v = \vec{0}$ avec $(1, -k) \neq (0, 0)$
 Donc (u, v) est liée
- 2ème cas : si $v = k.u$
 On a de même $(-k).u + 1.v = \vec{0} \Rightarrow (u, v)$ est liée.
 Dans tous les cas, (u, v) est liée

*fin demo***Propriété 27**

|| Une famille est liée
 \Leftrightarrow L'un des vecteurs est C.L. des autres.

Démonstration

- \Rightarrow Supposons (u, v, w) liée
 Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
 $a.u + b.v + c.w = \vec{0}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
 $(a, b, c) \neq (0, 0, 0) \Rightarrow a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$
 Par exemple, si $a \neq 0$,
 $a.u + b.v + c.w = 0 \Rightarrow a.u = -b.v - c.w$
 $\Rightarrow u = (-b/a).v + (-c/a).w$
 Donc u est CL de (v, w)
 De même, si $b \neq 0$ alors v est CL de (u, w) , et si $c \neq 0$ alors w est CL de (u, v)
 Donc l'un des vecteurs est CL des autres (mais rien ne nous permet de dire a priori si c'est u, v ou w)
- \Leftarrow Supposons que l'un des vecteurs est CL des autres
 On a par exemple u CL de (v, w)
 Donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $u = a.v + b.w$
 $\Rightarrow 1.u + (-a).v + (-b).w = \vec{0}$ avec $(1, -a, -b) \neq (0, 0, 0)$
 Donc (u, v, w) est liée

fin demo

Attention : on ne peut pas dire a priori lequel sera CL des autres.
 Ce que précise la propriété suivante

Propriété 28

|| Si (u_1, \dots, u_n) libre
 || Alors (u_1, \dots, u_n, v) liée $\Leftrightarrow v$ CL de (u_1, \dots, u_n)

Démonstration

$\Rightarrow a_1 u_1 + \dots + a_n u_n + b.v = 0$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n, b) \neq 0$

- Supposons $b = 0$
 $\Rightarrow a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$
 Impossible car (u_1, \dots, u_n) libre.
- Donc $b \neq 0$
 $a_1 u_1 + \dots + a_n u_n + b.v = 0$
 $\Rightarrow v = -(a_1/b)u_1 - \dots - (a_n/b)u_n$
 $\Rightarrow v$ CL de (u_1, \dots, u_n)

\Leftarrow Découle de propriétés précédentes

*fin demo***Propriété 29**

|| * (u, v) liée $\Rightarrow (u, v, w)$ liée
 || par contraposée :
 || * (u, v, w) libre $\Rightarrow (u, v)$ libre
 || généralisation :
 || * Toute sur-famille d'une famille liée est liée
 || * Toute sous-famille d'une famille libre est libre

6 Base**Définition 13 : Bases**

|| Soit E un espace vectoriel.
 || Une famille \mathcal{B} de vecteurs de E est une base de E
 || $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice.

Définition 14 : Base d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E .
 Une famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ de vecteurs de E est une base de F si

- \mathcal{F} est libre
- \mathcal{F} engendre F (c'est-à-dire $\text{Vect}(\mathcal{F}) = F$)

Propriété 30 : Conséquence : base d'un sev engendré

Soit (u, v, w) une famille de vecteurs de E
 Alors
 (u, v, w) est une base de $\text{Vect}(u, v, w)$
 $\iff (u, v, w)$ est libre

Démonstration Résulte immédiatement du fait que, par définition, (u, v, w) engendre $\text{Vect}(u, v, w)$ *fin demo*

7 Somme de sous-espaces vectoriels

7.1 Somme de deux sev

Définition 15 : somme de deux sev

Soient F et G deux sev de E
 On note $F + G = \{u + v / (u, v) \in F \times G\}$
 Ou encore

$$\forall w \in E, w \in F + G \iff \exists (u, v) \in F \times G, w = u + v$$

Propriété 31 : somme de deux sev

Soient F et G deux sev de E
 Alors $F + G$ est un sev de E

Démonstration

Montrons que $F + G$ est un sev de E

- Soit $w \in F + G$
 Alors il existe $(u, v) \in F \times G$ tel que $w = u + v$
 Or F et G sont inclus dans E donc $u \in E$ et $v \in E$

$$\Rightarrow w = u + v \in E$$

D'où $F + G \subset E$

- F et G sev de $E \Rightarrow 0_E \in F, 0_E \in G$
 $\Rightarrow 0_E = 0_E + 0_E \in F + G$
- Soient $(w_1, w_2) \in (F + G)^2$ et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$
 Il existe $(u_1, v_1) \in F \times G, (u_2, v_2) \in F \times G$ tels que

$$w_1 = u_1 + v_1 \quad w_2 = u_2 + v_2$$

$$\Rightarrow a.w_1 + b.w_2 = \underbrace{(a.u_1 + b.v_1)}_{\in F} + \underbrace{(a.u_2 + b.v_2)}_{\in G} \quad \text{car } F \text{ et } G \text{ sont stables}$$

par CL

$$\Rightarrow (a.w_1 + b.w_2) \in F + G$$

- Conclusion : $F + G$ est un sev de E *fin demo*

Propriété 32

Soient F, G et H trois sous-espaces de E

- 1) $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$
- 2) $[F + G \subset H] \iff [F \subset H \text{ et } G \subset H]$

Démonstration

- 1) Soit $u \in F$ Alors $u = u + \vec{0}$ avec $\vec{0} \in G \Rightarrow u \in F + G$
 Donc $F \subset F + G$. On a de même $G \subset F + G$

- 2) \Rightarrow Supposons $F + G \subset H$
 Soit $u \in F$
 $u = u + \vec{0}$ avec $\vec{0} \in G \Rightarrow u \in F + G$
 Or $F + G \subset H \Rightarrow u \in H$
 Donc $F \subset H$

On montre de même que : $G \subset H$

- \Leftarrow Supposons $[F \subset H \text{ et } G \subset H]$
 Soit $u \in F + G$
 Il existe $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$
 $v \in F$ et $F \subset H \Rightarrow v \in H$
 $w \in G$ et $G \subset H \Rightarrow w \in H$

$v \in H$ et $w \in H \Rightarrow v + w \in H$ (car H est un sev donc stable pour addition)

Donc $u \in H$

D'où $F + G \subset H$

fin demo

Propriété 33 : Conséquence

$\parallel F + G$ est le plus petit sev de E contenant F et G

Propriété 34 : Famille génératrice d'un somme

\parallel Soient \mathcal{U} et \mathcal{V} deux familles de vecteurs de E

\parallel Alors $\text{Vect}(\mathcal{U}) + \text{Vect}\mathcal{V} = \text{Vect}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$

Démonstration $\text{Vect}(\mathcal{U}) \subset \text{Vect}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ et $\text{Vect}(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$

et $\text{Vect}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ est un sev. Donc d'après la propriété précédente :

$$\text{Vect}(\mathcal{U}) + \text{Vect}\mathcal{V} \subset \text{Vect}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$$

D'autre part :

$\forall u \in \mathcal{U}, u \in \text{Vect}(\mathcal{U}) \subset \text{Vect}(\mathcal{U}) + \text{Vect}\mathcal{V} \Rightarrow u \in \text{Vect}(\mathcal{U}) + \text{Vect}\mathcal{V}$

De même, $\forall u \in \mathcal{V}, u \in \text{Vect}(\mathcal{U}) + \text{Vect}\mathcal{V}$

Or $\text{Vect}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ est le plus sev contenant tous les vecteurs de $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$

Donc $\text{Vect}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \subset \text{Vect}(\mathcal{U}) + \text{Vect}\mathcal{V}$

On a bien l'égalité des sev

fin demo

7.2 Somme directe

Définition 16 : Somme directe de 2 sev

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E

Alors la somme $F + G$ est dite **directe** si et seulement si

$$\forall u \in F + G, \exists!(v, w) \in F \times G, u = v + w$$

Dans ce cas, la somme est notée $F \oplus G$

(On dit aussi de F et G sont en somme directe)

Attention : ce qui est nouveau ici, c'est, pour chaque vecteur u , l'**unicité** du couple (v, w)

Propriété 35 : Caractérisation de la somme directe

\parallel Deux sev F et G de E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$

Démonstration

\Rightarrow Supposons que la somme est directe :

$$\forall u \in F + G, \exists!(v, w) \in F \times G, u = v + w$$

Montrons $F \cap G = \{\vec{0}\}$

• F et G étant des sev de E on a trivialement $\vec{0} \in F \cap G$

• Montrons que $F \cap G \subset \{\vec{0}\}$

Soit $u \in F \cap G$

Donc $u = \vec{0} + u$ avec $(\vec{0}, u) \in F \times G$

et $u = u + \vec{0}$ avec $(u, \vec{0}) \in F \times G$

Or $u \in F + G$

Donc le couple de $F \times G$ doit être unique

Donc $(\vec{0}, u) = (u, \vec{0})$

$\Rightarrow u = \vec{0}$ D'où l'inclusion et donc l'égalité des sev

\Leftarrow Supposons $F \cap G = \{\vec{0}\}$

Soit $u \in F + G$

Montrons qu'il existe un unique $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$

• Existence : découle de la définition de $F + G$

• Unicité

Soient $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$

et $(v', w') \in F \times G$ tel que $u = v' + w'$

Donc $v + w = v' + w'$

$\Rightarrow v - v' = w' - w$

$$(v, v') \in F^2 \Rightarrow v - v' \in F$$

$$(w, w') \in G^2 \Rightarrow w - w' \in G$$

Donc $v - v' = w - w' \in F \cap G$

Or $F \cap G = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow v - v' = w - w' = \vec{0}$

$\Rightarrow v = v'$ et $w = w'$

Ce qui prouve l'unicité

fin demo

Remarque :

Écrire $F = G \oplus H$ signifie en fait deux choses simultanément :

$$F = G \oplus H \iff \begin{cases} F = G + H \\ F, G \text{ sont en somme directe} \end{cases}$$

Propriété 36

Soient F, G, H trois sev de E . Alors

$$\begin{aligned} & F \oplus G = H \\ \iff & \begin{cases} F \subset H, G \subset H \\ \forall w \in H, \exists!(u, v) \in F \times G, w = u + v \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 1 :

- Pour montrer que deux sev F et G sont en somme directe, on montre simplement que $F \cap G = \{0\}$
- Pour montrer que sev sont en somme directe et que leur somme est H , alors on utilise plutôt la propriété ci-dessus.

Remarque 2 : Ne pas oublier de montrer que $F \subset H$ et $G \subset H$

Remarque 3 : Pour montrer

$$\forall w \in H, \exists!(u, v) \in F \times G, w = u + v$$

on procède le plus souvent par analyse-synthèse

Propriété 37 : Base d'une somme directe

Soient deux sev F, G de E , \mathcal{U} une base de F et \mathcal{V} une base de G
Alors F et G sont en somme directe si et seulement si $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ une base de $F + G$

Définition 17 : Supplémentaire

Soit F et G deux sev de E
On dit que F et G sont deux sev supplémentaires si $E = F \oplus G$

Propriété 38 : Caractérisation de sev supplémentaires

Deux sev F et G de E sont supplémentaires si et seulement si
 $\forall u \in E, \exists!(v, w) \in F \times G, u = v + w$

Démonstration

\Rightarrow Supposons F et G supplémentaires

Alors $E = F + G$ et $F \oplus G$

Soit $u \in E$

Alors $u \in F + G$

Et comme $F \oplus G$

Il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$

\Leftarrow Supposons $\forall u \in E, \exists!(v, w) \in F \times G, u = v + w$

- Montrons $F \oplus G$

Soit $u \in F + G$

F et G sev de $E \Rightarrow u \in E$

Donc $\exists!(v, w) \in F \times G, u = v + w$

Donc $F \oplus G$

- Montrons $E = F + G$

D'abord, $F \subset E$ et $G \subset E \Rightarrow F + G \subset E$

D'autre part, soit $u \in E$

Il existe un unique $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$

Donc $u \in F + G$

D'où $E \subset F + G$

fin demo