1 Bases

Définition 1 : Base

Soit E un espace vectoriel.

Une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de E est une base de E
$\iff$ $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice.

Définition 2 : Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$, on distingue une famille particulière de vecteurs qu'on appelle la base canonique de $\mathbb{R}^n$ composée des n vecteurs :
$e_1 = (1,\ 0,\ 0\ldots,\ 0)$, $e_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, $\ldots$, $e_n = (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1)$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$:
$e_1 = (1,\ 0,\ 0); e_2 = (0,\ 1,\ 0); e_3 = (0,\ 0,\ 1)$
$(e_1,\ e_2,\ e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3

Soit E un espace vectoriel.
E est dit <u>de dimension finie</u> s'il existe au moins une famille génératrice de E ayant un nombre fini de vecteurs.

Propriété 1 : Théorème de la base extraite

De toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E.

Propriété 2 : Existence d'une base

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base.

Propriété 3 : Théorème de la base incomplète

Toute famille libre de E peut être complétée en une base.
Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.
En d'autres termes

Si $\mathcal{F}$ est une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice

Alors il existe une sous-famille $\quad \mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G} \quad$ telle que

$(\mathcal{F}, \mathcal{G}_0)$ est une base de E

2 Dimension

Propriété 4 : $p+1$ vecteurs engendré par p vecteurs

Dans un espace engendré par p vecteurs, toute famille de $p+1$ vecteurs est liée.

Propriété 5 : conséquences : libre, liée

- Toute famille de plus de p vecteurs dans un espace engendré par p vecteurs est liée.
- par contraposée :
  Toute famille libre dans un espace engendré par p vecteurs contient au plus p vecteurs.

Propriété 6 : Théorème de la dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Alors <u>toutes</u> les bases de E ont le <u>même</u> nombre de vecteurs.

Exemples

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ possède n vecteurs. Donc $\mathbb{R}^n$ est de dimension n et toute base de $\mathbb{R}^n$ possède nécessairement exactement n vecteurs.

  $\boxed{\dim \mathbb{R}^n = n}$

  Attention : une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ n'est pas nécessairement une base de $\mathbb{R}^n$.

- Espace vectoriel de matrices :

  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension $n \times p$

  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ensemble des matrices carrées d'ordre n) est de dimension n^2

A partir de maintenant, tous les espaces vectoriels considérés, sauf mention contraire, seront de dimension finie

3 Conséquences

Propriété 7 : indépendance et dimension

Dans un espace de dimension n

- Toute famille de plus de n vecteurs est liée
- Toute famille libre possède au plus n vecteurs.

En utilisant le théorème de la dimension avec un espace vectoriel E de dimension n et le théorème de la base incomplète, on obtient les résultats suivants.
Prenons $\mathcal{F} = \emptyset$. $\mathcal{B} = (\mathcal{F} + \mathcal{G}_0) = \mathcal{G}$, contient n vecteurs. Donc $\mathcal{G}$ contient au moins n vecteurs.

Propriété 8 : génératrice et dimension

- Toute famille **génératrice** d'un espace vectoriel de dimension n contient **au moins** n vecteurs.

par contraposée :

- Toute famille contenant **strictement moins** de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n ne peut être génératrice.

Les différents résultats obtenus peuvent sont résumés ci-dessous :

Propriété 9

$\mathcal{F}$ est libre $\Rightarrow$ $Card(\mathcal{F}) \leq \dim E$
$\mathcal{F}$ est génératrice $\Rightarrow$ $Card(\mathcal{F}) \geq \dim E$

$Card(\mathcal{F}) > \dim E$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ est liée
$Card(\mathcal{F}) < \dim E$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice.

Propriété 10 : Libre, génératrice, base, « Le toutourien »

Si $Card(\mathcal{F}) = \dim(E)$
Alors $\mathcal{F}$ libre $\iff$ $\mathcal{F}$ base $\iff$ $\mathcal{F}$ génératrice.

Propriété 11 Conséquence

Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille libre de n vecteurs est une base.

Remarque

Cette propriété est fondamentale. Elle permet bien souvent de démontrer qu'une famille est une base. Il suffit de vérifier que la famille contient un nombre de vecteurs égal à la dimension de l'espace vectoriel, puis de montrer que la famille est libre

Exemple : $u = (1,2), v = (2,3)$
Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$

4 Dimension des sev

Définition 4 : Base d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Une famille $\mathcal{U} = (\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \dots,\ \vec{u}_p)$ de vecteurs de E est une base de F si

- $\mathcal{U}$ est libre
- $\mathcal{U}$ engendre F (c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) = F$)

Propriété 12 : Conséquence : base d'un sev engendré

Soit $\mathcal{U}$ une famille de vecteurs de E. Alors
$\mathcal{U}$ est libre $\iff$ $\mathcal{U}$ est une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{U})$

Propriété 13 : dimension d'un sev

Soit E un espace de dimension finie
Soit F un sous-espace vectoriel de E
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

Définition 5 : droites et plans

- Un ev de dimension 1 est appelé une droite vectorielle
- Un ev de dimension 2 est appelé un plan vectoriel.
- **Convention** : le sev $\{\vec{0}\}$ est par convention de dimension 0. Une base conventionnelle de cet ev est $\emptyset$.

Propriété 14 : égalité de deux sev

Soit F et G deux sev de E

Alors $\left.\begin{array}{l} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{array}\right\} \Rightarrow F = G$

Remarques :

- D'une certaine façon, l'égalité des dimensions remplace une des deux inclusions nécessaires pour l'égalité.
- Évidement, l'égalité des sev ne marche que si on a déjà une des deux inclusions. Sinon, dire que les dimensions sont égales ne signifie absolument pas que les sev sont égaux. Par exemple, deux droites vectorielles dans le plan géométrique sont de même dimension mais n'ont aucune raison d'être égales.

Démonstration

$\Rightarrow$ Évident

$\Leftarrow$ supposons $F \subset G$ et $\dim F = \dim G = p$

Soit $\mathcal{U}$ une base de F

$\mathcal{U}$ est une famille libre de G de p vecteurs dans un espace G de dimension p

Donc $\mathcal{U}$ est une base de G $\Rightarrow$ $\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) = G$

Or $\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) = F$ $\Rightarrow$ $F = G$

fin demo

Propriété 15 : Conséquence

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E.
Alors $F = E \iff \dim F = \dim E$

Propriété 16 : sev engendré

Soit $\mathcal{U}$ une famille de vecteurs de E

Alors $\dim \mathrm{Vect}(\mathcal{U}) \leq \mathrm{Card}\ (\mathcal{U})$

et $\mathcal{U}$ est libre $\iff$ $\mathrm{Card}\ (\mathcal{U}) = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$

Propriété 17

Soit $\mathcal{U}$ une sous-famille de $\mathcal{V}$

On a alors $\dim \mathrm{Vect}(\mathcal{U}) \leq \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{V})$

5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 6 : Rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E
Le rang de la famille $\mathcal{F}$ est la dimension du sev engendré par $\mathcal{F}$
On le note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$.

On a donc $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$

Propriété 18 : cas d'une famille libre

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de $\underline{p \text{ vecteurs}}$ d'un espace vectoriel E.
Alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p \iff \mathcal{F}$ est libre

Propriété 19 :

- $\mathrm{rg}(u_1,\ \dots,\ u_p) = \mathrm{rg}(u_1,\ u_2 + \lambda_2 u_1 \dots,\ u_p + \lambda_p u_1)$
- $\mathrm{rg}(u_1,\ \dots,\ u_p) = \mathrm{rg}\big(u_1 + (\lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p),\ u_2,\ \dots,\ u_p\big)$

On peut

- modifier tous les vecteurs à l'aide d'un seul qui est conservé
- Ou bien modifier un vecteur avec tous les autres

sans modifier le rang

Démonstration Résulte simplement de :

$\mathrm{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_p) = \mathrm{Vect}(u_1,\ u_2 + \lambda_2 u_1 \dots,\ u_p + \lambda_p u_1)$

$\mathrm{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_p) = \mathrm{Vect}\big(u_1 + (\lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p),\ u_2,\ \dots,\ u_p\big)$ *fin demo*

Famille échelonnée de vecteurs

Exemple :

$u_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$
$u_2 = (1,\ 3,\ 4,\ 0)$
$u_3 = (2,\ 3,\ 5,\ 6)$

Alors $\mathrm{rg}(u_1,\ u_2,\ u_3) = 3$

On a $u_1 \in \mathrm{Vect}(e_1),\ u_2 \in \mathrm{Vect}(e_1,\ e_2,\ e_3),\ u_3 \in \mathrm{Vect}(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$

En définissant $F_k = \text{Vect}(e_1,\ \dots e_k)$ et $F_0 = \{0\}$

On obtient : $u_1 \in F_1 \backslash F_0,\ u_2 \in F_3 \backslash F_1,\ u_3 \in F_4 \backslash F_3$

Ou encore, en posant $k_0 = 0,\ k_1 = 1,\ k_2 = 3,\ k_3 = 4$

$$u_1 \in F_{k_1} \backslash F_{k_0},\ u_2 \in F_{k_2} \backslash F_{k_1},\ u_3 \in F_{k_3} \backslash F_{k_2}$$

avec $0 = k_0 < k_1 < k_2 < k_3$

Propriété 20 Famille échelonnée de vecteurs

> Une famille échelonnée de vecteurs $(u_1,\ \dots,\ u_p)$ est libre
> et $\text{rg}(u_1,\ \dots,\ u_p) = p$

Application :

> Déterminer le rang de $(u,\ v,\ w,\ k)$ avec
>
> $u = (1,\ 2,\ 3,\ -6)$ $\qquad v = (2,\ -3,\ -5,\ 6)$
>
> $w = (1,\ 1,\ -2,\ 0)$ $\qquad k = (2,\ -1,\ 3,\ -4)$

6 Bases et coordonnées

Propriété 21 : caractérisation par les coordonnées

> Soit E un espace vectoriel.
> Une famille $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \dots,\ \vec{u}_n)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si
> Pour tout vecteur $\vec{k}$ dans E, il existe un <u>unique</u> n-uplet $(a_1, \dots,\ a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :
>
> $$\vec{k} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ \cdots + a_n\vec{u}_n$$
>
> $(a_1, \dots,\ a_n)$ sont appelés les **coordonnées** de $\vec{k}$ <u>dans la base</u> $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \dots,\ \vec{u}_n)$

On peut donc dire :

Propriété 22 : coordonnées

> Soit $\mathcal{B} = (\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ une base d'un e.v. E et $\vec{k} \in E$. Alors
> $\vec{k}$ a pour coordonnées (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$
> $\iff \quad \vec{k} = a.\vec{u} + b.\vec{v} + c.\vec{w}$

Soit $\mathcal{B}$=$(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \dots,\ \vec{u}_n)$ une base de E et k un vecteur de E.

$\vec{k}$ a pour coordonnées $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

se note $\vec{k}_{\mathcal{B}} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right.$ ou encore $\vec{k}_{\mathcal{B}}\ (x_1,\ \dots,\ x_n)$

ou bien encore $\vec{k}\ (x_1,\ \dots,\ x_n)$ dans $\mathcal{B}$

Attention

- On prendra garde de ne pas écrire « $k = (x_1,\ x_2 \dots x_n)$ » car, comme nous le verrons après, ce n'est vrai que dans le cas où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- L'ordre des vecteurs de la base est important, et donc aussi l'ordre des coordonnées d'un vecteur.
- Il faut bien préciser dans quelle base on est. Un des grands jeux en algèbre est de regarder un *même vecteur* dans des bases différentes. Eh bien, un même vecteur aura, dans deux bases différentes, des *coordonnées différentes* !

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (u_1,\ \dots,\ u_n)$ une famille de vecteurs de E

$\Rightarrow$ Supposons que $\mathcal{B}$ est une base de E
Soit $k \in E$.
Montrons qu'il existe un unique $(a_1,\ \dots,\ a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$k = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$$

§ <u>Existence</u>
$\mathcal{B}$ est génératrice
Donc $E = \text{Vect}(\mathcal{B})$
D'où il existe $(a_1,\ \dots,\ a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $k = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$
L'existence a été prouvée.

§ <u>Unicité</u>
Pour montrer l'unicité, nous allons supposer l'existence de deux triplet vérifiant $k = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$, et nous allons montrer alors qu'ils sont nécessairement égaux.

Ce qui prouvera bien l'unicité.

Soient $(a_1,\ \dots,\ a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(b_1,\ \dots,\ b_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que
$k = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$ et $k = b_1u_1 + \dots + b_nu_n$

On a alors
$a_1u_1 + \dots + a_nu_n = b_1u_1 + \dots + b_nu_n$

$\Rightarrow (a_1 - b_1)u_1 + \dots + (a_n - b_n) = \vec{0}$

Or $(u_1,\ \dots,\ u_n)$ est libre

Donc $a_1 - b_1 = \dots = a_n - b_n = 0$

$\Rightarrow \quad (a_1,\ \dots,\ a_n) = (b_1,\ \dots,\ b_n)$

Cela prouve l'unicité du n-uplet $(a_1,\ \dots,\ a_n)$

§ Conclusion :
Pour tout $k \in E$, il existe bien un unique n-uplet $(a_1,\ \dots,\ a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $k = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$

$\Leftarrow$ Réciproque :suppsons que

$$\forall \vec{k} \in E,\ \exists!(a_1,\ \dots,\ a_n) \in \mathbb{K}^n,\ \vec{k} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ \dots + a_n\vec{u}_n$$

Montrons que $(u_1,\ \dots,\ u_n)$ est une base de E

§ Génératrice ?

Soit $k \in E$

D'après la définition, il existe un unique n-uplet $(a_1,\ \dots,\ a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$k = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$

Donc k est CL de $(u_1,\ \dots,\ u_n)$

$\Rightarrow \quad k \in \text{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_n)$

D'où $k \in E \quad \Rightarrow \quad k \in \text{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_n)$

Donc $E \subset \text{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_n)$

D'autre part $(u_1,\ \dots,\ u_n) \in E^n \quad \Rightarrow \quad \text{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_n) \subset E$

Finalement $E = \text{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_n)$

Donc $(u_1,\ \dots,\ u_n)$ engendre E

§ Libre ?

On a $\vec{0} \in E$

Donc d'après la définition, il existe un unique n-uplet $(a_1,\ \dots,\ a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :
$a_1u_1 + \dots + a_nu_n = \vec{0}$

Or on sait que $0.u_1 + \dots + 0.u_n = \vec{0}$

Or le n-uplet solution est unique

Donc $(a_1,\ \dots,\ a_n) = (0,\ \dots,\ 0)$

Donc $(u_1,\ \dots,\ u_n)$ est libre.

§ Conclusion : $(u_1,\ \dots,\ u_n)$ est bien libre et génératrice

fin demo

Propriété 23 : Coordonnées

Toute relation sur les vecteurs est équivalente à la même relation sur les coordonnées dans une base donnée

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Notons X_u, X_v, X_w les cordonnées respectives des vecteurs u, v, w dans la base $\mathcal{B}$. Alors on a par exemple :

- $u = v \iff X_u = X_v$
- $w = au + bv \iff X_w = aX_u + bX_v$
- (u, v, w) est libre $\iff (X_u, X_v, X_w)$ est libre

Propriété 24 : Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Soit $(e_1,\ \dots,\ e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^n$

Alors $u = (a_1, \dots,\ a_n)$

$\iff$ u a pour coordonnées $(a_1, \dots,\ a_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Cela signifie que les composantes d'un vecteurs sont égales à ses coordonnées dans la base canonique (et ceci ne marche qu'avec la base canonique)

7 Changement de base

On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E
Soient (u, v, w) trois vecteurs de E de cordonnées

$$u_{\mathcal{C}} \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right. \; ; \; v_{\mathcal{C}} \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \; ; \; w_{\mathcal{C}} \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

On montre sans difficultés que (u, v, w) est une autre base de E notée $\mathcal{U}$.
On dira que $\mathcal{C}$ est ici « l'ancienne base »et $\mathcal{U}$ est la « nouvelle base ».

Soit $\vec{k}$ un vecteur de coordonnées $X_{\mathcal{C}} = \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right.$ dans la base $\mathcal{C}$ et de coordonnées $X_{\mathcal{B}} \left| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right.$ dans la base $\mathcal{U}$.

Quelle est la relation entre les cordonnées respectives $X_{\mathcal{C}}$ et $X_{\mathcal{U}}$ du vecteur $\vec{k}$?

k a pour coordonnées $(a,\ b,\ c)$ dans la base $\mathcal{U}$
$\iff k = a.u + b.v + c.w$

Donc dans l'ancienne base $\mathcal{C}$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrrr} x &=& a & +b & +c \\ y &=& 2a & +b & -c \\ z &=& 3a & & +c \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 2a+b-c \\ 3a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On remarque que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est constituée des coordonnées en colonnes des vecteurs $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ de $\mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{C}$.

Cette matrice est appelée la **matrice de passage** de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{U}$ (de l'ancienne base dans la nouvelle) et on la note $P = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{U}}$.

$$\text{On a : } P_{\mathcal{C}\to\mathcal{U}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1, \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C} \end{array}$$

$$\boxed{P = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{U}} = \begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \begin{pmatrix} & , & \end{pmatrix} \mathcal{C} \end{array}}$$

La relation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

s'écrit alors : $\boxed{X_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{U}}.X_{\mathcal{U}}}$

ou plus simplement : $X_{\mathcal{C}} = P.X_{\mathcal{U}}$

En inversant la matrice P, on trouve $P^{-1} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Et donc : $X_{\mathcal{C}} = P.X_{\mathcal{U}} \iff X_{\mathcal{U}} = P^{-1}X_{\mathcal{C}}$

Donc $P^{-1} = P_{\mathcal{U}\to\mathcal{C}}$ C'est-à-dire $\boxed{P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = (P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}})^{-1}}$

On a donc

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En remplaçant $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ successivement par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient les coordonnées respectives des vecteurs $e_1,\ e_2,\ e_3$ de $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{U}$:

$$\underset{\mathcal{B}}{e_1} \left| \begin{matrix} -1/7 \\ 5/7 \\ 3/7 \end{matrix} \right. \; ; \; \underset{\mathcal{B}}{e_2} \left| \begin{matrix} -1/7 \\ 2/7 \\ -3/7 \end{matrix} \right. \; ; \; \underset{\mathcal{B}}{e_3} \left| \begin{matrix} 2/7 \\ -3/7 \\ 1/7 \end{matrix} \right.$$

8 Somme de sous-espace vectoriels

Propriété 25 : Rappel

> Soient F, G, H 3 sev de E
> - $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$
> - $F + G \subset H \iff \begin{cases} F \subset H \\ G \subset H \end{cases}$

Cela signifie que $F + G$ est le plus petit sev contenant F et G

Propriété 26 : familles génératrices

> Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux familles de vecteurs de E
> Alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) + \mathrm{Vect}(\mathcal{V}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$

Démonstration

Posons $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{U}),\ G = \mathrm{Vect}(\mathcal{V}),\ H = \mathrm{Vect}(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$
Il faut montrer que $F + G = H$

$\subset$ $\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$
$\mathrm{Vect}(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$
H est donc un sev contenant les sev F et G
Donc $F + G \subset H$

$\supset$ $\forall u \in \mathcal{U},\ u \in \mathrm{Vect}(\mathcal{U}) = F \subset F + G$

$\forall u \in \mathcal{V},\ u \in \mathrm{Vect}(\mathcal{V}) = G \subset F + G$

Donc $\forall u \in (\mathcal{U},\ \mathcal{V}),\ u \in F + G$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Vect}(\mathcal{U},\ \mathcal{V}) \subset F + G$ $\Rightarrow$ $H \subset F + G$

On a donc $H = F + G$ c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) + \mathrm{Vect}(\mathcal{V}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$

fin demo

Propriété 27 (Conséquence) : dimension de la somme

> Soient F et G deux sev de dimension finie
> Alors $\dim(F + G) \leq \dim F + \dim G$

Démonstration

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ des bases respectives de F et G
On a donc $\mathrm{Card}\ (\mathcal{U}) = \dim E$, $\mathrm{Card}\ (\mathcal{V}) = \dim F$
Et $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$, $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{V})$
D'où, d'après la propriété précédente

$F + G = \mathrm{Vect}(\mathcal{U}) + \mathrm{Vect}(\mathcal{V}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$

$\Rightarrow$ $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ engendre $F + G$

$\Rightarrow$ $\dim(F + G) \leq \mathrm{Card}\ (\mathcal{U}, \mathcal{V})$
avec $\mathrm{Card}\ (\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathrm{Card}\ (\mathcal{U}) + \mathrm{Card}\ (\mathcal{V}) = \dim F + \dim G$
CQFD *fin demo*

Propriété 28 : Bases

> Soient F et G deux sev de **bases** respectives $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$
> Alors
> F et G sont en somme directe
> $\iff$ $(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ est libre
> $\iff$ $(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ est une base de $F + G$

Démonstration

Posons $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_p)$

$\Rightarrow$ Supposons $F \oplus G$
On sait que $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ est une famille génératrice de

$\mathrm{Vect}(\mathcal{U}) + \mathrm{Vect}(\mathcal{V}) = F + G$

Montrons que $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ est libre.
Soit $(a_1,\ \ldots,\ a_n,\ b_1, \ldots,\ b_p) \in \mathbb{K}^{n+p}$ tel que :

$a_1.u_1 + \cdots + a_n.u_n + b_1.v_1 + \cdots + b_p.v_p = 0$

$\Rightarrow$ $a_1.u_1 + \cdots + a_n.u_n = -b_1.v_1 - \cdots - b_p.v_p$
Or $a_1.u_1 + \cdots + a_n.u_n \in F$ et $-b_1.v_1 - \cdots - b_p.v_p \in G$
$\Rightarrow$ $a_1.u_1 + \cdots + a_n.u_n \in F \cap G$
Mais F et G en somme directe $\Rightarrow$ $F \cap G = \{0\}$
$\Rightarrow$ $a_1.u_1 + \cdots + a_n.u_n = -b_1.v_1 - \cdots - b_p.v_p = 0$
$\Rightarrow$ $(a_1, \ldots, a_n) = 0$ car $\mathcal{U}$ est libre
et $(b_1, \ldots, b_p) = 0$ car $\mathcal{V}$ est libre.
$\Rightarrow$ $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_p) = 0$
Donc $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ est libre.
Or on a vu que $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ engendre $F + G$
Donc $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ est une base de $F + G$

$\Leftarrow$ Supposons que $(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ base de $F + G$

Alors $(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ est libre
Montrons que F et G en somme directe c'est-à-dire $F \cap G = \{0\}$
Soit $m \in F \cap G \quad \Rightarrow \quad m \in F$ et $m \in G$
$m \in F \quad \Rightarrow \quad \exists(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $m = a_1.u_1 + \cdots + a_n.u_n$
$m \in G \quad \Rightarrow \quad \exists(b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ tq $m = b_1.v_1 + \cdots + b_p.v_p$
Donc $m = a_1.u_1 + \cdots + a_n.u_n = b_1.v_1 + \cdots + b_p.v_p$.
$\Rightarrow \quad a_1.u_1 + \cdots + a_n.u_n - b_1.v_1 - \cdots - b_p.v_p = 0$
Or $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ est libre
$\Rightarrow \quad (a_1,\ \ldots,\ a_n,\ -b_1,\ \ldots,\ -b_p) = 0$
$\Rightarrow \quad m = a_1.u_1 + \cdots + a_n.u_n = 0$
Donc $F \cap G \subset \{0\}$
$\Rightarrow \quad F \cap G = \{0\}$ CQFD

fin demo

Propriété 29 : Dimensions

Soient F et G sont deux sous-espaces de dimension finie
alors F et G sont en somme directe
$\Longleftrightarrow \quad \dim(F+G) = \dim F + \dim G$

Démonstration

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux bases respectives de F et G
On a Card $(\mathcal{U}) = \dim F$ et Card $(\mathcal{V}) = \dim G$

$\Rightarrow$ Supposons F et G en somme directe
D'après la propriété précédente,
$\mathcal{U}$ base de F et $\mathcal{V}$ base de $F \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ base de $F + G$

$\Rightarrow \quad \dim(F+G) = \text{Card } (\mathcal{U},\ \mathcal{V})$
De plus Card $(\mathcal{U},\ \mathcal{V}) = \text{Card } (\mathcal{U}) + \text{Card } (\mathcal{V}) = \dim F + \dim G$
Donc $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

$\Leftarrow$ Supposons $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$
On a vu que $(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ engendre $F + G$
avec Card $(\mathcal{U},\ \mathcal{V}) = \text{Card } (\mathcal{U}) + \text{Card } (\mathcal{L}V)) = \dim F + \dim G$
Et donc, d'après l'hypothèse Card $(\mathcal{U},\ \mathcal{V}) = \dim(F+G)$
$(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ est donc une famille génératrice de n vecteurs dans un espace de dimension n
Donc $(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ est une base de $F + G$
En particulier $(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ est libre.
Donc F et G sont en somme directe d'après la propriété précédente

fin demo

Propriété 30 : caractérisation sev supplémentaires

Soient F et G deux sev de E
Si 2 des 3 propriétés suivantes sont vérifiées alors F et G sont supplémentaires :

(i) $\dim F + \dim G = \dim E$
(ii) $F \cap G = \{0\}$
(iii) $E = F + G$

Démonstration

- (i)&(ii) $\Rightarrow$ (iii)
Supposons $\dim F + \dim G = \dim E$ et $F \cap G = \{0\}$
$F \cap G = \{0\} \quad \Rightarrow \quad F$ et G en somme directe
$\Rightarrow \quad \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$
$\Rightarrow \quad \dim(F \oplus G) = \dim E$ d'après (i)
$\Rightarrow \quad F \oplus G = E$

- (ii)&(iii) $\Rightarrow$ (i)
(ii) $\Rightarrow \quad F \cap G = \{0\} \quad \Rightarrow \quad F$ et G en somme directe
et (iii) $\Rightarrow \quad E = F \oplus G$

- (iii)& (i) $\Rightarrow$ (ii)
$E = F + G$ et $\dim F + \dim G = \dim E$
$\Rightarrow \quad \dim F + \dim G = \dim(F+G)$
$\Rightarrow \quad F$ et G en somme directe
et (iii) $\Rightarrow \quad E = F \oplus G$

fin demo

Définition 7 : Base adaptée à un sev

Une base $\mathcal{B} = (u_1,\ u_p,\ u_{p+1},\ \dots u_n$ de E est adaptée à un sev F si $(u_1,\ \dots u_p)$ est une base de F

En d'autres termes, la première partie de $\mathcal{B}$ est une base de F

Exemple :

Le sev F de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ a pour base (u, v) avec

$u = (1, 0, -1),\ v = (0, 1, -1)$ (à vérifier !)

On peut compler cette base (u, v) pour avoir une base de F en prenant par exemple : $e_3 = (0, 0, 1)$:

(u, v, e_3) est alors une base de E adaptée à F.

On peut dire aussi qu'une base $\mathcal{B} = (\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ de E est adaptée à F si $\mathcal{U}$ estune base de F

Propriété 31 : existence d'une base adaptée

Soit F un sev d'un espace vectoriel E de dimension finie
Alors E admet une base adaptée à F

Cela résultat du théorème de la base incomplète :

Si $\mathcal{U}$ est une base de F, c'est alors une famille libre de E.
On peut donc la compléter par une famille $\mathcal{V}$ de vecteurs de E pour avoir une base de E.
(On peut même choisir ces vecteurs dans une famille génératrice de E, par exemple dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ quand $E = \mathbb{R}^n$, comme on l'a fait dans l'exemple.)

Conséquence :

Propriété 32 : existence du supplémentaire

Soit F un sev d'un espace vectoriel E de dimension finie
Alors F admet un supplémentaire dans E

Démonstration

F admet une base $\mathcal{U}$
Donc $\mathcal{U}$ est une famille libre de E
Donc d'après le théorème de la base incomplète, $\mathcal{U}$ peut-être complétée par une famille $\mathcal{V}$ telle que $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ est une base de E
$\mathcal{V}$ est donc libre et est donc une base de $H = \mathrm{Vect}(\mathcal{V})$
On a donc $F + H = \mathrm{Vect}(\mathcal{U}) + \mathrm{Vect}(\mathcal{V}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = E$
Et comme $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ est une base de $F + H$ alors F et H sont en somme directe.
On a donc $E = F \oplus H$
H est un supplémentaire de F *fin demo*

Propriété 33

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E

Alors $\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$

Ou encore $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Démonstration

- Posons $F + G = H$
  $F \cap G$ est un sev de G
  Donc $F \cap G$ admet un supplémentaire G_1 dans G
  On a donc $G = G_1 \oplus (F \cap G)$
  Et $\dim G = \dim G_1 + \dim(F \cap G)$
- Montrons que $H = F \oplus G_1$
  § On a évidemment $F + G_1 \subset F + G = H$
  § Soit $u \in H = F + G$
  $\Rightarrow$ $\exists (v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$
  $w \in G = G_1 \oplus (F \cap G)$
  $\Rightarrow$ $\exists k \in G_1,\ \ell \in F \cap G$ tels que $w = k + \ell$
  $\Rightarrow$ $u = (v + \ell) + k$ avec $v + \ell \in F$ et $k \in G_1$
  $\Rightarrow$ $u \in F + G_1$
  D'où $H \subset F + G_1$
  (On peut aussi procéder ainsi :
  Montrons $F + G \subset F + G_1$
  $F \subset (F + G_1)$

$G = G_1 + (F \cap G)$
Or $\quad G_1 \subset F + G_1 \quad$ et $\quad F \cap G \subset F \subset F + G_1$
$\Rightarrow \quad G_1 + (F \cap G) \subset F + G_1$
$\Rightarrow \quad G \subset F + G_1 \quad$ Or $\quad F \subset (F + G_1)$
$\Rightarrow \quad H = F + G \subset F + G_1)$

On a donc $\quad F + G_1 = H$

§ Montrons que $F \cap G_1 = \{0\}$

Soit $\quad u \in F \cap G_1$
$u \in G_1$ et $G_1 \subset G \quad \Rightarrow \quad u \in G \quad \Rightarrow \quad u \in F \cap G$
$\Rightarrow \quad u \in G_1 \cap (F \cap G)$
Or $\quad G = G_1 \oplus (F \cap G) \quad \Rightarrow \quad G_1 \cap (F \cap G) = \{0\}$
$\Rightarrow \quad u = \vec{0}$
Donc $\quad F \cap G_1 = \{0\}$

§ Conclusion $\quad H = F \oplus G_1$

- On a donc $\quad \dim H = \dim F + \dim G_1$
  Or $\quad \dim G = \dim G_1 + \dim(F \cap G)$
  $\Rightarrow \quad \dim G_1 = \dim G - \dim(F \cap G)$
  $\Rightarrow \quad \dim H = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

fin demo

9 Deux exemples

9.1 Suites récurrentes linéaires

9.2 Solutions des ED homogènes