1) $\sin(3\pi/2) = -1$ (C 100d)

2) Pour $z \in \mathbb{C}$, $z - \bar{z} =$ $2\mathbf{i}.\mathrm{Im}(z)$ (C 210d)

3) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]-1,\ 1[$ (C 421a)

4) (u_n) géométrique de raison $q \neq 0$ (C 515c)

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{u_p - u_{n+1}}{1-q} = \quad u_p\,\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \quad \text{pour} \quad q \neq 1$$

- Les deux formules sont à connaître et sont équivalentes puisque $u_{n+1} = u_p q^{n-p+1}$
- Ne pas oublier le premier terme u_p car la somme commence avec $k = p$ (et non $k = 0$)

5) (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a.u_n + b$ avec $a \neq 1$ (C 549c)

Exprimer u_n en fonction de $n,\ u_0,\ a,\ b$

$\ell = a\ell + b \iff \boxed{\ell = \dfrac{b}{1-a}}$

$u_{n+1} = au_n + b \iff u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$

$\Rightarrow u_n - u_0 = a^n(u_0 - \ell) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell)}$

6) Vrai ou Faux ?..............**Faux** (C 556e)

$a^5 - b^5$ est factorisable par $a + b$

Car l'expression ne s'annule pas quand on remplace b par $-a$:
$a^5 - (-a)^5 = a^5 + a^5 \neq 0$

7) Donner un encadrement, le plus précis possible, de $\lfloor x \rfloor$ en utilisant x

$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ (C 601a)

8) Négation de $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ (x \geq y)$ et $(x^2 \neq 3)$ (C 709c)

$\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ (x < y)$ ou $(x^2 = 3)$

9) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (C 752e)

$f : E \to F$ est injective $\iff$ $\forall (x,\ y) \in E^2,\quad f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$

En effet c'est vérifié par toutes les fonctions (injectives ou non)

10) Soient $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux applications (C 769)

$f = g \iff$

- $E = G$ et $F = H$
 (même ensemble de départ et même ensemble d'arrivé)
- $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$

11) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 810b)

$\forall x \in \mathbb{R},\quad 0 < a \leq b \Rightarrow a^x \leq b^x$

$a^x \leq b^x \iff e^{x\ln a} \leq e^{x \ln b} \iff x\ln a < x \ln b$
$\iff x(\ln a - \ln b) < 0$
Donc c'est faux pour $x < 0$

12) Vrai ou Faux ? ...**Vrai** (C 845a)

$x + x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x - x^3$

En effet : $x + x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $x - x^3 \underset{x\to 0}{\sim} x$

13) $\arccos x < \pi/3 \iff 1 \geq x > 1/2 \iff x \in]1/2,\ 1]$ (C 923 a)

Explication : équation définie pour $x \in [-1, 1]$.
Et comme arccos est strictement décroissante
$\arccos x < \pi/3 \iff x > \cos(\pi/3) = 1/2$

14) définition : Soit f définie sur I et $a \in I$ (C 1017b)

f admet un minimum local en a

$\iff$ il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |x - a| \leq r \Rightarrow f(x) \geq f(a)$

15) $F(u) = \int^u \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+8} = \int^u \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+4}$ (C 1069c)

$= \int^u \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+2^2} = \int^u \frac{\mathrm{d}x}{4\,[\frac{x}{2}-1)^2+1]} = \frac{2}{4}\int^u \frac{(1/2)\,\mathrm{d}x}{(\frac{x}{2}-1)^2+1}$

$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{u-2}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}$

16) $F(x) = \int^x (5-6t)^{1/2}\,\mathrm{d}t$ et $\left(u^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}.u'.u^{3/2}$ (C 1073)

$F(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{-6}\int^x \frac{3}{2}(-6).(5-6t)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{9}(5-6x)^{3/2}$

Pour $5-6t \geq 0 \iff t \leq \frac{5}{6}$ donc sur $I = \left]-\infty, \frac{5}{6}\right]$

17) $y'' + by' + cy = 0$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cas $\Delta > 0$: (C 1155a)

Les solutions sont de la forme $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

et $r_1,\ r_2$ racine(s) de $r^2 + br + c = 0$

18) Soit (u_n) une suite réelle (C 1202b)

M n'est pas un majorant de la suite u $\iff$ $\exists n \in \mathbb{N}, M < u_n$

C'est la négation de « M est un majorant de la suite u
$\iff \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$

19) Vrai ou Faux ? ...**Vrai** (C 1222a)

$\left[\ \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\ \right] \Rightarrow \left[\ \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \geq A\ \right]$

En effet, $\left[\ \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \geq A\ \right] \iff (u_n)$ est non majorée
Et on a bien $\left[\ \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\ \right] \Rightarrow (u_n)$ est non majorée
Par contre la réciproque est fausse

20) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ (C 1281a)

21) DL ordre 3 en 1 de $x \mapsto e^{2x}$ (C 1302)

$f(1+x) = e^{2(1+x)} = e^2 e^X$ avec $X = 2x \to 0$ quand $x \to 0$

$= e^2(1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + o(X^3))$

$= e^2(1 + 2x + \frac{1}{2}(4x^2) + \frac{1}{6}(8x^3 + o((2x)^3))$

$= e^2 + 2e^2 x + 2e^2 x^2 + \frac{4e^2}{3}x^3 + o(x^3)$

22) Limite de $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$ en 0 (C 1307)

$f(x) = \frac{x - (e^x - 1)}{x(e^x - 1)} = \frac{N(x)}{D(x)}$ $D(x) = x(e^x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$

$N(x) = x + 1 - e^x = x + 1 - (1 + x + x^2/2 + o(x^2)) = -x^2/2 + o(x^2)$

$N(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2/2 \Rightarrow f(x) \sim \frac{-x^2/2}{x^2} = -1/2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{-1}{2}$

23) Théorème des valeurs intermédiaires (C 1520a)

Soit f est une fonction réelle continue sur un intervalle I et $a,\ b \in I$

Alors, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe x_0 compris entre a et b tel que $y_0 = f(x_0)$

24) Définition géométrique : soit $f : I \to \mathbb{R}$ (E 1591a)

f est convexe sur I ssi la courbe C_f est au-dessous de ses cordes

25) $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (C 1641c)

$\dim \mathcal{A} = \quad 3 = (2+1+0)$

26) Vrai ou Faux ?...**Vrai** (C 1414b)

(u, v, w) est liée $\Rightarrow$ $(u,\ v,\ w,\ k)$ est liée

27) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (C 1427e)

$(u_1, \dots u_p)$ famille liée de E $\Rightarrow$ $\dim E \geq p$

28) Démonstration : Soient $F,\ G$ deux sev de E (C 1451e)

Montrer que $F+G$ est un sev de E

- Soit $k \in F+G$, il existe $(u,v) \in F \times G$ tel que $k = u+v$

  $\Rightarrow \quad u \in E$ et $v \in F \quad \Rightarrow \quad k = u+v \in E$

  Donc $F+G \subset$E
- $\vec{0} \in F$ et $\vec{0} \in G$ Or $\vec{0}+\vec{0} \in F+G \quad \Rightarrow \quad \vec{0} \in F+G$
- soient $(k_1,\ k_2) \in (F+G)^2$ et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$

  Il existe $(u_1,\ v_1) \in F \times G$ et $(u_2,\ v_2) \in F \times G$ tels que

  $k_1 = u_1 + v_1$ et $k_2 = u_2 + v_2$

  $\Rightarrow \quad ak_1 + bk_2 = \underbrace{(au_1 + bu_2)}_{\in F} + \underbrace{(av_1 + bv_2)}_{\in G}$ car $F,\ G$ stables par CL

  $\Rightarrow \quad ak_1 + bk_2 \in F+G$

29) Inégalité des accroissements finis avec les valeurs absolues (C 1802c)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a,\ b[$
- $\forall t \in]a,b[, \quad |f'(t)| \leq M$

Alors $\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$

30) Soient $\mathcal{B},\ \mathcal{C}$ deux bases de E (E 1475b)

On donne $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Soit $k \in E$ de coordonnées $(1,-1)$ dans la base $\mathcal{C}$

Quelles sont ses cordonnées dans la bases $\mathcal{B}$?

$$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

k a pour coordonnées $(2,\ 3)$ dans la base $\mathcal{B}$ $\quad k_{\mathcal{B}} \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right.$