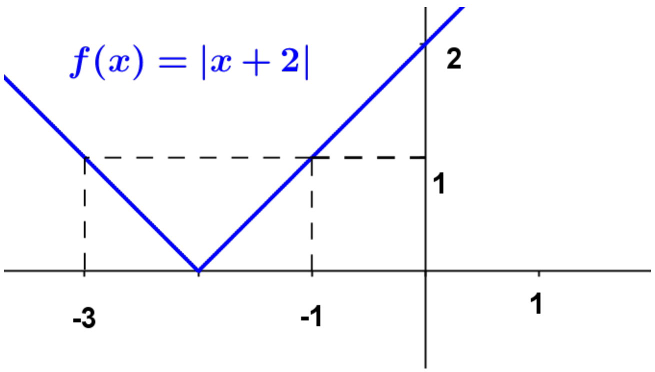
1) $\dfrac{3}{3^a} = \quad 3^{1-a}$ (C 010)

2) $\tan x = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \iff x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (C 104b)

3) $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*,\ \arg(z) + \arg(z') = \quad \arg(z.z') \quad [2\pi]$ (C 231b)

4) Dans $\mathbb{C}$, les racines 4$^{\text{ème}}$ de l'unité sont $\quad 1,\ -1,\ \mathbf{i},\ -\mathbf{i}$ (C 324)

5) Tracer l'allure de la courbe de $\quad x \mapsto |x+2|$ (C 445b)



6) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p\, \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$ $\quad$ pour $\quad q \neq 1$ (C 516b)

$$\text{(premier terme)} \times \frac{1 - \text{raison}^{(\text{nbre termes})}}{1-\text{raison}}$$
$$= \frac{(1^{\text{er}}\text{ qui y est}) - (1^{\text{er}}\text{ qui n'y est plus })}{1-\text{raison}}$$

7) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 556d)

$a^6 + b^6$ est factorisable par $a - b$

Car l'expression ne s'annule pas quand on remplace b par $+a$:

$$a^6 + a^6 = 2a^6 \neq 0$$

8) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \lfloor x + y \rfloor = x + \lfloor y \rfloor$ (C 602d)

9) Négation de $\quad (\exists y \in F,\ y > A) \quad \Rightarrow \quad (\forall x \in E,\ f(x) > A)$: (C 709e)

$(\exists y \in F,\ y > A)$ ET non-$(\forall x \in E,\ f(x) > A)$

$(\exists y \in F,\ y > A)$ ET $(\exists x \in E,\ f(x) \leq A)$

10) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (C 752g)

$f : E \to F$ est injective

$\iff \quad \forall (x,\ y) \in E^2, \quad x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$

En fait, cette propriété est vérifiée pour <u>toutes</u> les applications

11) Soient $\quad f : E \to F$ une application, $\quad A \subset E, \quad B \subset F$ (C 785)

La restrictition de f : $f_{|A}^{|B}$ est bien définie

$\iff \quad f(A) \subset B \quad$ ou encore : $\quad \forall x \in A,\ f(x) \in B$

12) Montrons que $\quad \forall x \leq 0, \quad 0 < a \leq b \Rightarrow a^x \geq b^x$ (C 810e)

(Rappel : on a $\quad a^x = \mathrm{e}^{x.\ln a}$)

Soit $x \geq 0$. $\quad$ Supposons $\quad 0 < a \leq b$

$\Rightarrow \quad \ln a \leq \ln b \quad$ (car $\quad \ln \quad$ croissante sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow \quad x.\ln a \geq x.\ln b \quad$ car $x \leq 0$

$\Rightarrow \quad \mathrm{e}^{x.\ln a} \geq \mathrm{e}^{x.\ln b} \quad$ car exp croissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad a^x \geq b^x$

13) Équivalent : $\quad 3x^2 - 4x^3 \underset{x \to 0}{\sim} 3x^2$ (C 842a)

14) $\arccos(\sin(\frac{\pi}{8}) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = \arccos(\cos(\frac{3\pi}{8}) = \frac{3\pi}{8}$ (C 915d)

car $\quad \frac{3\pi}{8} \in [0,\ \pi]$

15) <u>Définition</u> : $\quad f$ continue en $a \quad \iff \quad \displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (C 1010a)

16) $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \quad \int^x t^{-n}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{-(n-1)x^{n-1}} & \text{si } n \neq 1 \\ \ln|x| & \text{si } n = 1 \end{cases}$ (C 1053a)

17) $J = \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$ (C 1114b)

Bornes : $\begin{cases} x = 1 = \sin(\pi/2) & t = \pi/2 \\ x = 0 = \sin 0 & t = 0 \end{cases}$ $\quad x = \sin t \Rightarrow\ \mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}t$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{(\cos t)^2} = |\cos t| = \cos t \quad$ car $t \in [0; \pi/2]$

$J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^2\ \mathrm{d}t$

18) Soit l'équation $\quad ay'' + by' + c.y = \mathrm{e}^{\lambda x} \quad$ avec $a \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

Si λ n'est pas racine de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (C 1156b)

alors on cherche une solution particulières de la forme $\quad y_1(x) = K\mathrm{e}^{\lambda x}$

19) L'implication suivante est FAUSSE (C 1223c)

(u_n) n'est pas minorée $\quad\Rightarrow\quad \left[\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty\ \right]$

Donnez un contre exemple : $\quad u_n = (-1)^n.n$

$u_{2n} = 2n \to +\infty \quad$ donc $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad$ est faux

et $\quad u_{2n+1} = -(2n+1) \to -\infty \quad$ donc (u_n) n'est pas minorée

20) Limite classique $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n \quad = \mathrm{e}^{-2}$ (C 1254b)

$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1 + \frac{-2}{n})\right) \qquad \ln(1+X) \underset{0}{\sim} X$

$\Rightarrow \quad n\ln(1+\frac{-2}{n}) \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{-2}{n} = -2$

$\Rightarrow \quad n\ln(1+\frac{-2}{n}) \to -2 \quad\Rightarrow\quad \left(1-\frac{2}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-2}$

Ne pas rater le passage à la limite AVANT de passer à l'exponentielle

21) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 1299e)

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$

f admet un DL à l'ordre 2 en $a \Rightarrow f$ admet une dérivée seconde en a

Cela ne marche que pour le DL_1 :

f admet un DL à l'ordre 1 en $a \iff f$ dérivable en a

22) Soit f décroissante sur $]a,\ b[$ avec $a < b$, $\quad (a,\ b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ (C 1416b)

Si f n'est pas minorée sur $]a,\ b[$ alors $\quad \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$

23) Soit $\quad f(x) = \sqrt[3]{x}\sin\sqrt{x} \quad$ définie sur $[0, +\infty[$ (C 1470b)

f est-elle dérivable en 0 ?

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt[3]{x}\sin(\sqrt{x})}{x} = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x^{2/3}}$

Or $\quad \sin(\sqrt{x}) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad$ car $\sqrt{x} \to 0$ quand $x \to 0^+$

D'où : $\quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^{1/2}}{x^{2/3}} = \dfrac{1}{x^{1/6}} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty \quad$ Donc f n'est dérivable en 0

24) Théorème de la limite de la dérivée (cas infini) (C 1606b)

Si f est continue sur I, dérivable sur $I\backslash\{x_0\}$

et $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = +\infty \quad$ (ou $-\infty$)

Alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \quad$ (ou $-\infty$)

et $\quad C_f$ admet une tangente verticale en x_0

25) Définition : Une matrice A est symétrique (C 2622a)

$\iff \quad {}^tA = A \quad\iff\quad \forall i, j \in [[1, n]], \quad a_{i,j} = a_{j,i}$

26) $\mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathrm{Vect}(u, v)$ (C 2704a)

$\iff \quad w \in \mathrm{Vect}(u, v) \quad\iff\quad w$ CL de $(u,\ v)$

27) <u>Définition</u> : $(u,\ v,\ w)$ est une base de E (C 2720)

$\iff$ $(u,\ v,\ w)$ est libre et génératrice (de E) (/ engendre E)

28) Soient $F,\ G,\ H$ trois sev de E (C 2751d)

$$F \subset H \text{ et } G \subset H \iff \underline{F + G \subset H}$$

29) Soient F de base $\mathcal{U}$ et G de base $\mathcal{V}$ deux sev de E (C2759a)

F et G sont en somme directe $\iff$ $(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ est libre

30) Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $n \in \mathbb{N}$ (C 3100a)

$\mathrm{d}^\circ P = n \iff a_n \neq 0$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ p > n \Rightarrow a_k = 0$