1) $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \iff x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (C 104a)

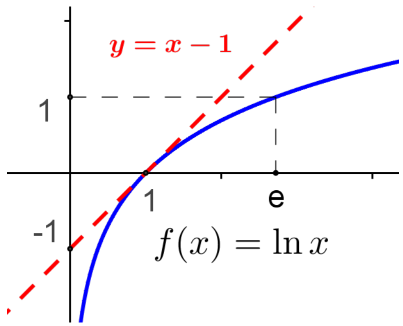
2) $\arg(z + z') =$ PFC (C 231a)

3) Racines n-ièmes <u>distinctes</u> de l'unité dans $\mathbb{C}$: (C 321d)

sont de la forme $z_k = \omega^k$ avec $\omega = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{n}}$ et $k \in [[0, n-1]]$

4) Tracer l'allure de la courbe de $x \mapsto \ln x$ (C 441a)

<u>Tracer une tangente particulière et donner son équation</u>



5) $S_n = \sum_{k=1}^{n} x^{2k} = \sum_{k=1}^{n} (x^2)^k$ (C 517a)

Si $x^2 \neq 1$, $S_n = x^2 \dfrac{1 - x^{2n}}{1 - x^2} = \dfrac{x^2 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$

Si $x^2 = 1 \iff (x = 1 \text{ ou } x = -1)$ $S_n = n$

6) <u>Définition</u> : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \max(x,\ -x)$ (C 560c)

7) Pour $n \geq 1$, $\prod_{k=0}^{n} j = j^{n+1}$ (C 610a)

8) Soit (E) une équation d'inconnue x . On a : (E 713a)

$(E) \Rightarrow \dots \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 5$

Que peut-on dire en français de 3 et 5 ?

3 et 5 sont les seuls solutions **possibles** de l'équation (E).

9) <u>Définition</u> : *Exprimer en français* : (E 754c)

$f : E \to F$ est surjective si et seulement si
Tout élément de F admet un unique antécédent dans$E$ par f

10) <u>Limite particulière</u> de ln avec <u>$x \to 0$</u> : $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (C 801a)

11) Vrai ou Faux ? . . .**Faux** (C 825b)

$f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} h \Rightarrow \lim_{x \to a} (f - g) = 0$

$\dfrac{f(x)}{h(x)} \to 1$ et $\dfrac{g(x)}{h(x)} \to 1 \Rightarrow \dfrac{f(x) - g(x)}{h(x)} \Rightarrow f - g = o(h)$
Mais cela n'implique pas que $f - g \to 0$
Par exemple : $f(x) = x^2 + 2x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $h(x) = x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$
Mais $(f - g)(x) = x \not\to 0$

12) Vrai ou Faux ?. . .**Faux** (C 902c)

Le domaine de définition de arcsin est $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\left[\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ est le domaine des <u>valeurs</u> de arcsin.
Son domaine de définition est $[-1; 1]$

13) $\arccos x > \pi/4 \iff x < \cos \pi/4 \iff x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ avec $x \in [-1, 1]$

$\iff \boxed{-1 \leq x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ (C 923d)

Car arccos est définie sur $[-1, 1]$ et strictement **décroissante**

14) Soit f continue et strictement décroissante sur l'intervalle $I = \left[a,\ b\right[$
Alors f réalise une bijection ... (C 1030c)

de $\quad I = \left[a,\ b\right[\quad$ sur $\quad J = f(I) = \left] \lim_{x\to b} f(x); f(a)\right]$

Explications

- f est décroissante donc il faut inverser les bornes dans $f(I)$.
- f définie sur $\left[a, b\right[$, donc pas définie en b. $\quad f(b)$ n'existant, il faut remplacer par la limite.
- Par contre f est définie en a, donc pas besoin de chercher la limite en a

15) $\displaystyle\int^u \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int^u \frac{(1+x)-1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ (C 1077)

$\displaystyle = \int^u 1 - \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = u - \ln|1+u| \quad$ sur $\quad \left]-\infty,\ -1\right[$ et $\left]-1,\ +\infty\right[$

16) $\displaystyle f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t = G(x^2) - G(x)$ (C 1140b)

$\displaystyle \Rightarrow \quad f'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = 2x\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} - \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \frac{2\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^x}{x}$

avec $\quad g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \quad$ et $\quad G$ primitive de g qui existe car g continue sur $\mathbb{R}$

17) Déterminer les solutions de l'équation $\quad$ (E) $4y' + x.y = 0$ (C 1151d)

$(E) \quad \iff \quad y' + \dfrac{x}{4}.y = 0 \quad \iff \quad y' + a(x)y = 0$

avec $\quad a(x) = \dfrac{x}{4} \quad$ et $\quad A(x) = \dfrac{x^2}{8} \quad$ A une primitive est a

Les solution sont de la forme $\quad y(x) = K^{-A(x)} = K\mathrm{e}^{-x^2/8}, \quad K \in \mathbb{R}$

18) Définition : $\quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (C 1220c)

$\iff \quad \forall A \in \mathbb{R},\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \Rightarrow u_n \leq A$

19) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 1246g)

Si $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1 \quad$ alors $\quad \lim_{n\to+\infty} (u_n)^n = +\infty$

Par exemple : $\quad u_n = 1 + \frac{1}{n} \quad (u_n)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$

20) Propriété : Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$ (C 1298d)

f admet un DL à l'ordre 1 en $a \quad \iff \quad f$ est dérivable en a

21) Soit f décroissante sur $\left]a,\ b\right[$ $\quad$ avec $a < b$, $\quad (a,\ b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ (C 1416a)

Si f n'est pas majorée sur $\left]a, b\right[$ $\quad$ alors $\quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

22) Définition : $\quad \emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, \quad I$ est un intervalle (C 1419)

$\iff \quad \forall (a,\ b) \in I^2, \quad a < b \Rightarrow [a,\ b] \subset I$

23) Soit $f(x) = \dfrac{1}{|x-1| - 1}$ (C 1460d)

- $f(x)$ existe $\quad \iff \quad |x-1| \neq 1$
  $\iff \quad x - 1 \neq 1$ et $x - 1 \neq -1 \qquad D_f = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$
- $x \mapsto |x|$ dérivable sur $\mathbb{R}^* \quad \Rightarrow \quad f$ dérivable pour $\quad x - 1 \neq 0$
  $\Rightarrow \quad D' = \mathbb{R}\backslash\{0, 1, 2\}$

24) Paramétrage d'une corde : Soit f une fonction. (C 1490b)

Une équation paramétrique de la corde de C_f entre a et b est :

$x(t) = t.a + (1-t).b, \quad y(t) = t.f(a) + (1-t).f(b) \quad$ avec $t \in [0, 1]$

25) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ (C 1615a)

f est-elle continue en 0 ? f est-elle dérivable en 0 ?
(On admettra que $\sin(1/x)$ et $\cos(1/x)$ ne convergent pas en 0

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |\sin(1/x)| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \leq |x|$

D'où par encadrement $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

f est donc continue en 0

26) $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (C 2641f)

$\dim \mathcal{A} = \dfrac{n(n-1)}{2} \quad (= (n-1) + (n-2) + \cdots 1)$

27) Vrai ou Faux ?...**Vrai** (C 2716a)

$u,\ v$ sont colinéaires $\iff$ $(u,\ v)$ est liée

28) Soient $F,\ G,\ H$ trois sev de E (C 2751c)

$F + G \subset H \iff (F \subset H \text{ et } G \subset H)$

29) F, G deux sev de E, $\mathcal{U}$ une base de F, $\mathcal{V}$ une base de G (C2759a)

F et G sont en somme directe $\iff$ $(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$ est libre

30) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (C 2775d)

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux bases de E, $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Soit $k \in E$ de coordonnées $(1,\ 1)$ dans la base $\mathcal{C}$
Alors k a pour coordonnées $(4,\ 7)$ dans la base $\mathcal{B}$

$$X_{\mathcal{C}}^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_{\mathcal{B}}^k = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} X_{\mathcal{C}}^k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$