

## Introduction

Dans toute la suite  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

On connaît les fonctions polynômes définies, par exemple, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2x^2 - 7,$$

en particulier les trinômes du second degré :  $ax^2 + bx + c$

Mais si  $A$  est une matrice carrée, on peut aussi calculer  $f(A) = A^3 + 2A^2 - 7I$

Le but est de généraliser et donc d'introduire des polynômes formels : un polynôme formel s'écrit avec  $X$  au lieu de  $x$

On distinguera alors

- le polynôme  $P = X^3 + 2X^2 - 7$
- d'avec la fonction polynomiale  $f$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2x^2 - 7$$

Mais pas la peine de se prendre la tête avec cela maintenant. Tout s'éclairera en son temps. Et la lumière jaillira au dessus de nos têtes baissées pour illuminer nos fronts plissés par la douleur lancinante due au travail exténuant de nos pauvres neurones dévitalisés.

## 1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

### 1.1 Définitions élémentaires

**Introduction** On construit les polynômes formels à partir d'une indéterminée (notée classiquement  $X$ ) est de ses puissances notées  $X^0 = 1, X^1 = X, X^2, X^3, \dots$

#### Définition 1 : polynôme

On appelle polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$  toute combinaison linéaire des puissances de  $X$  qui s'écrit sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad \text{avec} \quad \forall k \in [[0, n]], a_k \in \mathbb{K}$$

#### Définition 2 : suite presque nulle

On dit qu'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est presque nulle si tous ses termes, sauf éventuellement un nombre fini, sont nuls

Ce qui équivaut à dire que cette suite est nulle à partir d'un certain rang

#### Propriété 1

Tout polynôme s'écrit de façon unique sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

où  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite presque nulle de  $\mathbb{K}$

#### Propriété 2 : Égalité

Deux polynômes  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$  sont égaux

si et seulement si  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$\iff \forall k \in \mathbb{N}, a_k = b_k$

#### Définition 3 : Notation

L'ensemble des polynôme à une indéterminée  $X$  et à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est noté  $\mathbb{K}[X]$

On a trivialement  $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$

Exemple :  $1 + X + i.X^2 \in \mathbb{C}[X]$

Le polynôme nul se note faute de mieux  $0$

#### Définition 4 : Monôme

On appelle monôme tout polynôme de la forme  $a_n X^n$

## 1.2 Degré

**Définition 5 : Degré**

- Si  $P$  est le polynôme nul, par convention  $d^\circ P = -\infty$
- Si  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \neq 0$   

$$d^\circ P = n \iff a_n \neq 0 \text{ et } \forall k > n, a_k = 0$$

On a alors  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $n = d^\circ P$
- Conséquence :  

$$d^\circ P \leq n \iff \forall k > n, a_k = 0$$

**Définition 6 : coefficient dominant**

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \neq 0$  un polynôme de degré  $n$   
 Alors  $a_n$  est appelé le coefficient dominant de  $P$   
 $a_n X^n$  est appelé le terme dominant de  $P$   
 Si  $a_n = 1$ , alors  $P$  est appelé un polynôme unitaire

**Exemple :**  $P = -3X^4 + 7X - 4$   $P$  est de degré 4  
 son coefficient dominant est  $-3$   
 Son terme dominant est  $-3X^4$  (= son terme de plus haut degré)  
 $P$  n'est pas unitaire  
 Par contre  $\frac{-1}{3}P = X^4 - \frac{7}{3}X + \frac{4}{3}$  est unitaire (on dit que c'est le polynôme unitaire associé à  $P$ )

**Définition 7 :  $\mathbb{K}_n[X]$** 

$\mathbb{K}_n[X]$  est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$

## 1.3 Espace vectoriel

**Définition 8 : Combinaison linéaire**

Soient  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ ,  $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ ,  $q(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$   
 On définit alors  $\lambda.P + \mu.Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$

**Propriété 3 : degré de la somme**

Soient  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

- $d^\circ(P + Q) \leq \max(d^\circ(P), d^\circ(Q))$
- Si  $d^\circ(P) \neq d^\circ(Q)$   
 alors  $d^\circ(P + Q) = \max(d^\circ(P), d^\circ(Q))$
- En particulier :  

$$(d^\circ P \leq n) \text{ et } (d^\circ Q \leq n) \Rightarrow d^\circ(\lambda P + \mu Q) \leq n$$

**Exemple :**

$P = 2X^3 - 4X + 7$   $Q = 9X^2 + 12X - 5$   $R = -2X^3 + 8X^2 + 1$   
 $P + Q = 2X^3 + 9X^2 + 8X + 2$   $P + R = 8X^2 - 4X + 8$

- $d^\circ P \neq d^\circ Q$  donc  $P + Q$  est du degré le plus élevé :  

$$d^\circ(P + Q) = \max(d^\circ(P), d^\circ(Q)) = \max(2, 3) = 3$$
- $d^\circ P = d^\circ R = 3$  donc  $P + R$  est de degré au plus 3, mais on ne peut rien dire de plus :  

$$d^\circ(P + R) = 2 \text{ mais } d^\circ(P - R) = 3$$

**Propriété 4 : espaces vectoriels**

$\mathbb{K}[X]$  est un espace vectoriel  
 Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  est un sev de  $\mathbb{K}[X]$

Provient de  $(d^\circ P \leq n) \text{ et } (d^\circ Q \leq n) \Rightarrow d^\circ(\lambda P + \mu Q) \leq n$

**Propriété 5 : dimension, bases canoniques**

- $(1, X, X^2, X^3, \dots, )$  est la base canonique (infinie) de  $\mathbb{K}[X]$
- $(1, X, X^2, X^3, \dots, X^n)$  est la base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$

**1.4 Produit**

**Définition 9 : Produit**

Soient  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$

On définit le polynôme  $PQ = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k$  avec  $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$

En particulier, si  $P = X^k$  et  $Q = X^\ell$ , alors  $X^k X^\ell = PQ = X^{k+\ell}$   
 Ce qui justifie a posteriori la notation sous forme de puissance :  $(X^n)$

**Exemple**

Calculer  $P \cdot Q$  avec  $P(X) = X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1$   
 et  $Q(X) = nX^n + (n-1)X^{n-1} + \dots + X$

**Propriété 6 : Degré du produit**

- Soient  $P, Q$  deux polynômes :
- $d^\circ PQ = d^\circ P + d^\circ Q$  (avec la convention  $-\infty + n = -\infty$ )

**Propriété 7 : degré d'une puissance**

- Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $n \in \mathbb{N}$
- $\deg(P^n) = n \cdot \deg P$

**Propriété 8 : Intégrité**

- $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], PQ = 0 \Rightarrow P = 0$  ou  $Q = 0$

**Propriété 9 Règle de calcul**

- $\forall P, Q, R \in \mathbb{K}[X], \forall a \in \mathbb{K},$
- $PQ = QP$
- $P(QR) = (PQ)R$
- $a(PQ) = (aP)Q = P(aQ)$
- $P(Q + R) = PQ + PR$  ( et  $(Q + R)P = QP + RP$   
 car le produit est commutatif)
- $P.1 = P$
- $P.0 = 0$

**1.5 composition**

Exemple

$P = X^2 - 2X + 7 \quad Q = 2X - 3$

$P \circ Q = Q^2 - 2Q + 7$   
 $= (2X - 3)^2 - 2(2X - 3) + 7$   
 $= (4X^2 - 12X + 9) - 4X + 6 + 7$   
 $= 4X^2 - 16X + 22$

$Q \circ P = 2P - 3 = 2X^2 - 4X + 11$

On remarque que :  $P \circ Q \neq Q \circ P$

**Définition 10 : Composée de polynômes**

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes tels que :  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$

Alors  $P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$

**ATTENTION** : en règle générale  $P \circ Q \neq Q \circ P$

En particulier,

- si  $a \in \mathbb{K}$ , on identifie le nombre  $\lambda \in \mathbb{K}$  et le polynôme constant  
Et donc on pourra écrire  $P \circ \lambda = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$  qui est aussi un polynôme constant
- Par ailleurs, on a aussi  $P \circ X = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n = P = P(X)$   
Ce qui permet d'écrire pour les polynômes formels indifféremment  $P$  ou  $P(X)$

Exemple : Soit  $P = X^2 - 2X + 7$

$$P \circ X = X^2 - 2X + 7 = P$$

Par ailleurs  $X \circ P = P$

On a donc  $P \circ X = P = X \circ P$

Cela signifie que  $X$  est élément neutre pour la composition de polynômes

**Propriété 10 : calculs**

Soient  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$

- $d^\circ(P \circ Q) = d^\circ(Q \circ P) = d^\circ P \times d^\circ Q$
- $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$
- $(aP_1 + bP_2) \circ Q = a.(P_1 \circ Q) + b.(P_2 \circ Q)$   
mais, en général :  $P \circ (aQ_1 + bQ_2) \neq a.(P \circ Q_1) + b.(P \circ Q_2)$   
(On peut distribuer à droite mais pas à gauche)
- $(P.Q) \circ R = (P \circ R).(Q \circ R)$   
mais, en général :  $P.(Q \circ R) \neq (P \circ Q).(P \circ R)$

**Exemple :** Soient  $P = X^3 - 2X + 7$      $Q = 2X^7 - 3X^5$

$$P \circ Q = \ll P(Q) \gg = Q^3 - 2Q + 7 \quad Q \circ P = 2P^7 - 3P^5$$

$$d^\circ Q = 7 \Rightarrow d^\circ Q^3 = 21 \Rightarrow d^\circ P \circ Q = 21 = d^\circ P . d^\circ Q$$

$$d^\circ P = 3 \Rightarrow d^\circ P^7 = 21 \Rightarrow d^\circ Q \circ P = 21 = d^\circ P . d^\circ Q$$

**2 Divisibilité et division euclidienne**

**Un exemple :** division euclidienne de  $A = X^4 + X^3 + X + 1$  par  $B = 2X^2 - X + 1$

**Propriété 11 : Théorème**

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes tels que  $B \neq 0$

Alors il existe un unique couple de polynômes  $(Q, R)$  tels que :

$$A = B.Q + R \quad \text{et} \quad d^\circ R < d^\circ B$$

$Q$  est appelé le quotient et  $R$  le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

**Exemples d'applications**

a) Soient  $A = X^7 - 5X^3 + 7$  et  $B = X - 2$   
Quel reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  ?

b)  $A = X^7 - 5X^3 + 7, \quad B = X^2 - X = X(X - 1)$     Reste  $R$  ?

c)  $A = X^7 - 5X^3 + 7, \quad B = X^2 + 4$     Reste ?

**Définition 11 : divisibilité**

$A$  est divisible par  $B$  si et seulement si il existe  $Q$  tel que  $A = BQ$

**3 fonctions polynomiales et racines**

**Définition 12 : fonction polynôme**

A tout polynôme  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  de  $\mathbb{K}[X]$  on associe une fonction

$$\tilde{P} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{telle que} \quad \forall x \in \mathbb{K}, \quad \tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$\tilde{P}$  est appelée la fonction polynomiale associée à  $P$

**Propriété 12**

$$\begin{aligned} (aP + bQ) &= a\tilde{P} + b\tilde{Q} & (\tilde{P}Q) &= \tilde{P}\tilde{Q} \\ (P \circ Q) &= \tilde{P} \circ \tilde{Q} & (\tilde{P}') &= (\tilde{P})' \end{aligned}$$

**Définition 13 : Racine d'un polynôme**

$a \in \mathbb{K}$  est racine du polynôme  $P$  si et seulement si  $\tilde{P}(a) = 0$

**Vocabulaire** : Attention à bien distinguer « racine » et « solution »

On parle des racines d'un **polynôme** et des solutions d'une **équation**.

De façon plus précise, on dira

$a$ est <b>racine</b> du polynôme $P$ $\iff a$ est <b>solution</b> de l'équation $P(x) = 0$
--

**Propriété 13 : Caractérisation des racines**

$a \in \mathbb{K}$  est racine du polynôme  $P$   
 si et seulement si  $P$  est divisible par  $X - a$   
 C'est-à-dire il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = (X - a)Q$

**Définition 14 : Multiplicité d'une racine**

$a$  est racine de multiplicité  $m \in \mathbb{N}^*$  de  $P$  ssi  
 il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  
 $P = (X - a)^m Q$  avec  $Q(a) \neq 0$

**Définition 15 : Conventions**

- Si  $a$  n'est pas racine de  $P$  ( $\iff P(a) \neq 0$ ), on dit que  $a$  est racine de multiplicité 0
- Une racine de multiplicité 1 est dite racine simple.
- On définit de même les racines doubles, triples, etc.

**Exemples**

- $P(X) = (X - 2)^3(X^3 + X^2 + X + 1) = (X - 2)^3Q$   
 2 est racine de multiplicité 3 de  $P$  car  $Q(2) = 8 + 4 + 2 + 1 \neq 0$
- $P(X) = (X - \mathbf{i})^2(X + \mathbf{i})^2(X - 3)(X + 4)^3$   
 $\mathbf{i}$  et  $-\mathbf{i}$  sont racines doubles, 3 est racine simple et  $-4$  est racine triple de  $P$

**Propriété 14 : multiplicité**

$a$  est racine de multiplicité au moins  $m \in \mathbb{N}^*$  de  $P$   
 ssi il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  
 $P = (X - a)^m Q$

Remarque : il n'a donc pas de condition sur  $Q$  dans ce cas.

**Propriété 15 : racines et divisibilité**

$\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sont des racines distinctes de  $P$  de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_p$  si et seulement si  
 il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  
 $P = \left( \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k} \right) \cdot Q$  et  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(\alpha_k) \neq 0$

**Propriété 16 (Conséquence) : Degré et racines**

- Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sont des racines de  $P$  de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_p$   
 Alors  $\text{d}^\circ P \geq \sum_{k=1}^p m_k$
- En particulier un polynôme de degré  $n$  possède au plus  $n$  racines distinctes

**Propriété 17 (Conséquence) : polynôme nul et racines**

- Un polynôme  $P$  de degré au plus  $n$  est nul si et seulement si il possède au moins  $n + 1$  racines distinctes
- Un polynôme est nul si et seulement si il possède une infinité de racines distinctes
- Deux polynômes  $P$  et  $Q$  de degré au plus  $n$  sont égaux si et seulement si ils coïncident pour  $n + 1$  valeurs c'est-à-dire qu'il existe  $n + 1$  valeurs distinctes  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  telles que  
 $\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, P(x_i) = Q(x_i)$
- Deux polynômes  $P$  et  $Q$  sont égaux si et seulement si ils coïncident pour une infinité de valeurs c'est-à-dire qu'il existe une infinité d'éléments  $x_i \in \mathbb{K}$  tels que  $\forall i, P(x_i) = Q(x_i)$

**Exemple :** Soit  $P$  un polynôme tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = 0$   
 $P$  admet alors une infinité de racines. Donc  $P$  est le polynôme nul.

Remarque que cela ne vaut pas pour des fonctions classiques : par exemple  $f : x \mapsto \sin(\pi x)$  qui s'annule pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et qui pourtant n'est pas la fonction nulle.

**Définition 16 : Polynôme scindé**

- $P$  polynôme de degré  $n$  est scindé si et seulement si il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que

$$P = a_n(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) = a_n \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k),$$

les  $\alpha_k$  n'étant pas nécessairement distincts

- On peut dire de façon équivalente :  
 $P$  est scindé s'il admet  $p$  racines distinctes  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  de multiplicités  $m_1, \dots, m_p$  telles que

$$d^\circ P = m_1 + \dots + m_p$$

Dans ce cas :  $P = a_n \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k}$

**Définition 17 : Polynôme simplement scindé**

Un polynôme  $P$  est dit simplement scindé s'il est scindé et que toutes ses racines sont simples

Autrement dit, un polynôme de degré  $n$  est simplement scindé si et seulement si il admet  $n$  racines distinctes

## 4 Polynômes irréductibles et décomposition

### 4.1 Polynômes irréductibles

**Propriété 18 : Théorème de d'Alembert-Gauss**

- || Soit  $P$  un polynôme de degré  $\geq 1$  de  $\mathbb{C}[X]$
- || Alors  $P$  admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

Polynôme irréductible : Un polynôme  $P$  est irréductible s'il ne peut pas se décomposer comme un produit non trivial de deux polynômes

Par exemple :  $P = 2X - 3$  peut s'écrire  $P = QR$  avec  $Q = 2$  et  $R = X - 3/2$ . Mais dans ce cas, la décomposition est « triviale » : on peut toujours mettre un polynôme constant en facteur. C'est donc sans intérêt.

Par contre pour  $P = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$  la décomposition en produit (dans  $\mathbb{C}[X]$ ) est non triviale.

**Définition 18 : Polynômes irréductibles**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme non constant,

$P$  est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$

$$\iff \forall (A, B) \in \mathbb{K}[X], (P = AB) \Rightarrow (A \text{ est constant ou } B \text{ est constant})$$

$$\iff \forall (A, B) \in \mathbb{K}[X], (P = AB) \Rightarrow (A \in \mathbb{K} \text{ ou } B \in \mathbb{K})$$

**Définition 19 : Polynômes réductibles**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P$  est réductible dans  $\mathbb{K}[X]$  ssi

$$\exists (A, B) \in \mathbb{K}[X]^2, P = AB \text{ et } d^\circ A \geq 1 \text{ et } d^\circ B \geq 1$$

Exemple :  $P = X^2 + 4$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$  mais réductible dans  $\mathbb{C}[X]$

### 4.2 Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

**Propriété 19 : Polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$**

- Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont ses polynômes de degré 1 (de la forme  $P = aX + b$ )
- Les polynômes irréductibles **unitaires** de  $\mathbb{C}[X]$  sont de la forme  $X - \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$

**Propriété 20 : Décomposition d'un polynôme dans  $\mathbb{C}[X]$** 

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme de degré  $n \geq 1$ .

Alors il existe  $n$  nombre complexes (non nécessairement deux à deux distincts)  $z_1, \dots, z_n$  tels que :

$$P = a_n(X - z_1)(X - z_2) \dots (X - z_n)$$

De plus cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Un complexe  $a$  est une racine de multiplicité  $k$  ssi il apparaît exactement  $k$  fois dans la décomposition.

Cette décomposition peut aussi s'écrire :

**Propriété 21 : Décomposition d'un polynôme dans  $\mathbb{C}[X]$** 

$$P(X) = a_n(X - z_1)^{m_1}(X - z_2)^{m_2} \dots (X - z_k)^{m_k} = a_n \prod_{i=1}^k (X - z_i)^{m_i}$$

où  $z_1, \dots, z_k$  sont  $k$  racines **distinctes** de  $P$

et  $m_1, \dots, m_k$  sont leurs ordres de multiplicité respectifs.

On a donc :  $m_1 + \dots + m_k = n$ .

Conséquence :

**Propriété 22 : Polynômes scindés de  $\mathbb{C}[X]$** 

|| Tout polynôme (non nul) de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé

**Propriété 23 : Somme et produit des racines**

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme de degré  $n$  dans  $\mathbb{C}[X]$

Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ses  $n$  racines (distinctes ou non) dans  $\mathbb{C}$

$$\text{Alors } s = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

$$\text{et } p = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

$$\text{En particulier } P(0) = a_0 \Rightarrow p = \alpha_1 \dots \alpha_n = (-1)^n \frac{P(0)}{a_n}$$

En effet, par développement :

$$P = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$$

$$= a_n(X^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$$

$$= a_n X^n - a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)X^{n-1} + \dots + a_n(-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

$$\Rightarrow a_{n-1} = -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \quad \text{et} \quad a_0 = a_n(-1)^n(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$$

**4.3 Décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$** 

Exemple :  $P = X^4 + X^2 + 1$

Trouver la factorisation dans  $\mathbb{C}$ , puis la factorisation dans  $\mathbb{R}$

**Définition 20 : Polynôme conjugué**

Soit  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$

On appelle polynôme conjugué de  $P$  le polynôme  $\bar{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{a}_k X^k$

$$\text{Exemple : } P = \mathbf{i}X^2 + e^{\mathbf{i}\pi/5}X + 3 + \mathbf{i} \Rightarrow \bar{P} = -\mathbf{i}X^2 + e^{-\mathbf{i}\pi/5}X + 3 - \mathbf{i}$$

En particulier, pour  $a \in \mathbb{C}$  :  $(X - a)^k$  et  $(X - \bar{a})^k$  sont conjuguées.

**Lemme : polynôme réel**

|| Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ .

|| On a alors  $P \in \mathbb{R}[X] \iff \bar{P} = P$

**Propriété 24**

|| Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\bar{P}(\bar{z}) = \overline{P(z)}$

**Propriété 25 : Racine du polynôme conjugué**

|| Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$

$\alpha \in \mathbb{C}$  est racine de polynôme  $P$  de multiplicité  $k$

||  $\iff \bar{\alpha}$  est racine de  $\bar{P}$  de multiplicité  $k$

**Propriété 26**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme **réel** et  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Alors

$\alpha$  est une racine complexe de  $P$  de multiplicité  $k$

$\iff \bar{\alpha}$  est également racine de  $P$  de multiplicité  $k$

Et dans ce cas,  $[(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})]^k$  est un polynôme **réel** diviseur de  $P$

**Propriété 27 : polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$** 

Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  ont deux formes possibles :

- $aX - b$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$
- $aX^2 + bX + c$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$  et  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

**Propriété 28 : Polynômes unitaires irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$** 

Les polynômes **unitaires** irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont :

- $X - b$  avec  $b \in \mathbb{R}$
- $X^2 + bX + c$  avec  $b, c \in \mathbb{R}$  et  $\Delta = b^2 - 4c < 0$

**Propriété 29 : Théorème de décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$** 

Un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  de degré  $n$  et de coefficient dominant  $a_n$  se décompose de la façon suivante :

$$P(X) = a_n \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i) \prod_{j=1}^q (X^2 + b_j X + c_j)$$

avec

- $p + 2q = n$
- $\alpha_i, b_j, c_j$  sont des éléments de  $\mathbb{R}$ .
- les polynômes  $X^2 + b_j X + c_j$  n'ont aucune racine dans  $\mathbb{R}$

Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

**5 Dérivation**

Si on a une fonction polynôme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

En dérivant on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_n \cdot n x^{n-1} + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + a_3 \cdot 3 x^2 + a_2 \cdot 2 x + a_1 \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \cdot j \cdot x^{j-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (k+1) x^k \end{aligned}$$

On adapte cette formule aux polynômes :

**Définition 21**

Soit  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$  un polynôme

Alors on pose  $P' = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} (k+1) X^k$

qui est le polynôme dérivé de  $P$

**Propriété 30**

- $P' = 0 \iff P$  est un polynôme constant
- Si  $d^\circ P \geq 1$ ,  $d^\circ P' = d^\circ P - 1$
- $(aP + bQ)' = a.P' + b.Q'$
- $(PQ)' = P'Q + PQ'$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(Q^n)' = nQ^{n-1}Q'$
- $(P \circ Q)' = (P' \circ Q).Q'$

**Propriété 31 : Dérivée de la fonction polynomiale**

$$\| (\tilde{P}') = (\tilde{P})'$$

**Propriété 32 : Égalité des dérivées**

Soient  $P, Q$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$

$$P' = Q' \iff [\exists b \in \mathbb{C}, P = Q + b]$$

**Propriété 33 : Égalité de deux polynômes**

Soit  $a \in \mathbb{K}$  (quelconque). Alors

$$P = Q \iff [P' = Q' \text{ et } P(a) = Q(a)]$$

**Définition 22 : Dérivées successives**

On note  $P^{(n)}$  la dérivée d'ordre  $n$  de  $P$ .

On a  $P^{(0)} = P$ ,  $P^{(1)} = P'$  et  $P^{(n+1)} = (P^{(n)})' = (P^{(n)})'$

**Propriété 34 : Degré et dérivées**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$

$$\bullet \text{ d}^\circ P \leq n \iff P^{(n+1)} = 0$$

$$\bullet \text{ d}^\circ P = n \iff P^{(n+1)} = 0 \text{ et } P^{(n)} \neq 0$$

Exemple :  $P = X^3 + X^2 + X + 1$  On a  $P^{(3)} = 6 \neq 0$  et  $P^{(4)} = 0$

**Propriété 35 : Formule de Leibniz**

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  et  $n \in \mathbb{N}$  Alors

$$(P \cdot Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

**Propriété 36 : Formule de Taylor ( $\text{d}^\circ P \leq n$ )**

Soit  $P$  un polynôme de degré au plus  $n$  et  $a \in \mathbb{K}$ , alors :

$$P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}$$

**Propriété 37 : Formule de Taylor générale**

Soit  $P$  un polynôme de degré quelconque et  $a \in \mathbb{K}$ , alors :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Exemple :  $P = X^3 + X^2 + X + 1$  La formule de Taylor en 2 donne :

$$P(X) = \frac{P^{(3)}(2)}{3!} (X-2)^3 + \frac{P^{(2)}(2)}{2!} (X-2)^2 + \frac{P^{(1)}(2)}{1!} (X-2) + \frac{P^{(0)}(2)}{0!}$$

$$P(2) = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

$$P'(X) = 3X^2 + 2X + 1 \quad P'(2) = 12 + 4 + 1 = 17$$

$$P''(X) = 6X + 2 \quad P''(2) = 14$$

$$P^{(3)}(X) = 6 \quad P^{(3)}(2) = 6$$

D'où  $P(X) = (X-2)^3 + 7(X-2)^2 + 17(X-2) + 15$

**Propriété 38 : Caractérisation des racines par les dérivées**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $a \in \mathbb{K}$ . Alors :

$a$  est racine de multiplicité  $m$

$$\iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

**Exemple** : 1 est racine de multiplicité 2 de  $P = X^4 - 2X^2 + 1$

En effet  $P(1) = 0$

$$P' = 4X^3 - 4X \quad P'(1) = 4 - 4 = 0$$

$$P'' = 12X^2 - 4 \quad P''(1) = 8 \neq 0$$

**Propriété 39 : Conséquence**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $a \in \mathbb{K}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Alors

$P$  est divisible par  $(X-a)^m$

$$\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X-a)^m Q$$

$$\iff a \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } \underline{\text{au moins}} \ m$$

$$\iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$$