Exercice 1 Calculer $(X+1)^5-(X-1)^5$ dans$\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X)=(X-2)^n-(X+5)^n$.
Déterminer son degré et son coefficient dominant.

Exercice 3 $P(X)=(X-2)^n-(X+3)^n+5n(X+1)^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer son degré et son coefficient dominant.

Exercice 4 Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de

1) $2X^3-X^2-X+2$ par X^2-1
2) $3X^5+4X^2+1$ par X^2+2X+3
3) $3X^5+2X^4-X^2+1$ par X^3+X+2
4) $3X^5+2X^4-X^2+1$ par X^2+X+2

Exercice 5 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}_\alpha$ le reste de la division euclidienne de P par $X-\alpha$. Montrer que $\mathbb{R}_\alpha(X)=P(\alpha)$.

Exercice 6 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1) Soit S le reste de la division euclidienne de P par X^2+1. Montrer que $S=0$ si et seulement si $P(i)=0$.
2) Déterminer les entiers positifs n tel que X^2+1 divise X^n+1.

Exercice 7 Déterminer le reste de la division euclidienne de :
a) X^n-X-1 par $(X-1)(X+2)$ b) X^n-X-1 par $(X-1)^2$

Exercice 8 Appliquer la formule de Taylor au polynôme

$P(X)=X^4+X^3-4X^2+X+1$ en 1.

Exercice 9 Déterminer les racines de $P(X)=4X^3-20X^2+27X-9$, puis sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$. Indication : tester si 3 est racine.

Exercice 10 (*) Déterminer les racines réelles de
$Q(X)=X^4-4X^3+9X^2-10X+4$.
En déduire la forme factorisée de ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11 (*) Soit $P(X)=4X^3+4X^2+3X+3$.
Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 12 (*) Soit $P(X)=X^5-1$.
Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 13 Soit $P(X)=X^6+1$.
Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 14 Soit $P(X)=X^9+X^6+X^3+1$.
Déterminer sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 15 Soit $\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X)=X^{2n}-2\cos(n\theta)X^n+1$. Déterminer sa décomposition en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16 Résoudre les équations d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$ suivantes :
1. $(P'(X))^2=4P(X)$ 2. $(X^2+1)P''(X)-6P(X)=0$

Exercice 17
Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose d'étudier les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(nx)=T_n(\cos(x)).$$

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si un tel polynôme T_n existe, alors il est unique.
2. Déterminer $T_0(X), T_1(X)$ et $T_2(X)$.
3. Soit $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.
   a) Factoriser $\cos((n+1)x)+\cos((n-1)x)$.
   b) En déduire que si $T_{n-1}(X)$ et $T_n(X)$ sont bien définis, on peut définir $T_{n+1}(X)$ par la relation
   $$T_{n+1}(X)=2XT_n(X)-T_{n-1}(X).$$
   c) En déduire par récurrence l'existence de $T_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer le degré de $T_n(X)$ et son coefficient dominant.
5. Soit $n \geq 1$. Déterminer les $x \in [0,\pi]$ tels que $\cos(nx)=0$.

   En déduire l'ensemble des racines de $T_n(X)$ puis sa décomposition en produit de polynômes irréductibles.
6. En évaluant le polynôme $T_n(X)$ en un point bien choisi, en déduire :
   $$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)=\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})(-1)^n}{2^{n-1}}$$