Professeur : SERVAIN	**Discipline : Maths**
Classe : PCSI	**Durée de l'épreuve : 3 h 00**
Durée minimale : 2 h 30	**Matériel autorisé : Rien**

- **Marge droite de 2 cm**
- Marge gauche d'au moins 4 cm ;
- En-tête de **première feuille** : au moins 8 cm ;
- Crayon à papier interdit

Sanction : -10 **%**

Exercice 1 *Les 5 questions sont totalement indépendantes*

1) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0\}$
   Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^3$

2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par
$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 3x + 2y - t = 0 \text{ et } 2x - y + t = 0\right\}$$
   Déterminer une base et la dimension de F

3) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $\left\{\begin{array}{l} x + 2z - t = 0 \\ 2x - z + 3t = 0 \end{array}\right.$
   Déterminer une base et la dimension de F

4) Dans $\mathbb{R}^4$, on donne $u = (-1,\ 0,\ 2,\ 3)$ $\quad v = (1,\ 0,\ 1,\ 1)$
   Déterminer un système d'équation de $\quad F = \mathrm{Vect}(u, v)$

5) Dans $\mathbb{R}^3$, on donne $u = (1,\ 2,\ 4)$ $\quad v = (2,\ 1,\ 5)$ $\quad w = (-1,\ 3,\ 1)$
   Montrer que (u, v, w) est une famille liée
   Determiner la dimension de $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$

Exercice 2 *A commencer sur une nouvelle page*

Pour $n \geq 1$, on pose $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \quad$ et $\quad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$

1) En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[n,\ n+1]$, donner un encadrement de $\quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
2) Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
3) En déduire un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en $+\infty$

Exercice 3 *A commencer sur une nouvelle page*

Soit u la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3^n \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$
On se propose dans la suite de déterminer l'expression de u_n en fonction de n de trois manières différentes. Les trois méthodes suivantes doivent donc être traitées de façons totalement indépendantes.

1) 1ère méthode
   Soit v la suite telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$
   a) Donner la relation de récurrence liant v_{n+1} et v_n.
   b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

2) 2ème méthode
   On note maintenant w la suite telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^n w_n$
   a) Donner la relation de récurrence liant w_{n+1} et w_n.
   b) En déduire l'expression de w_n en fonction de n
   c) En déduire l'expression u_n en fonction de n.

3) 3ème méthode
   a) Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que,
   $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$
   b) En déduire l'expression u_n en fonction de n.

A faire sur une nouvelle feuille

Problème : Étude d'une fonction intégrale

1. Donner le $DL_5(0)$ de $\dfrac{1}{1+x^2}$

   Retrouver ainsi le $DL_6(0)$ de $\arctan x$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $t + \arctan t = 0$

3. On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t + \arctan t}$

   a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$

   b) Etudier la parité de f

   c) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer que
   $$f'(x) = \frac{2}{2x + \arctan(2x)} - \frac{1}{x + \arctan(x)} \text{ pour } x > 0$$

   d) Montrer que f est croissante sur $]0,\ +\infty[$ et donner ses variations sur $]-\infty,\ 0[$

4. On étudie le comportement de f au voisinage de $+\infty$

   a) Montrer que pour pour tout $x > 0$,
   $$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| \leq \frac{\pi}{2} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

   b) En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$ et préciser sa valeur.

5. On étudie le comportement de f au voisinage de 0^+

   a) Montrer qu'il existe deux réels $a,\ b$ tels que
   $$\frac{1}{t + \arctan t} = \frac{a}{t} + bt + o(t) \quad \text{au voisinage de } 0^+$$

   b) Soient $h > 0$ et $\alpha > 0$ et g une fonction continue tels que
   $$\forall t \in]0,\ h[,\ \left| \frac{g(t)}{t} \right| \leq \alpha$$
   Déterminer alors une majoration (la plus précise possible) de
   $$\frac{\left| \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\ \mathrm{d}t \right|}{x^2} \quad \text{pour } x \in]0, h/2[$$

   c) En déduire que si h est une fonction continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = o(x)$ au voisinage de 0^+ alors $\displaystyle\int_x^{2x} h(t)\ \mathrm{d}t = o(x^2)$ au voisinage de 0^+

   d) Montrer alors que f admet au voisinage de 0 un développement à l'ordre 2 que l'on exprimera

   e) Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable.
   Exprimer alors les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

   f) Etudier, au voisinage de 0, la position relative de f et de sa tangente en 0

   g) Déterminer un équivalent simple de $f'(x)$ en 0

   h) En déduire que f est deux fois dérivable en 0, et calculer $f''(0)$