EXERCICE 1

On rappelle l'encadrement "classique " $2,7 < e < 2,8$, *encadrement qui permet facilement d'obtenir les inégalités suivantes :* $2 < e < 3 < e^2$, *inégalités que l'on pourra utiliser sans démonstration.*

On note f la fonction $x \mapsto 4 - \frac{1}{4}\ln(x)$ et I l'intervalle $[3;4]$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a **au moins** une solution dans I.

Remarque : comme l'énoncé porte sur l'existence « **d'au moins** une solution », il oriente vers l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires.

Posons $g(x) = f(x) - x$

$g(3) = 4 - \ln 3 - 3 = 1 - \frac{1}{4}\ln 3$ avec $\mathrm{e} < 3 < \mathrm{e}^2 \Rightarrow 1 < \ln 3 < 2$

$\Rightarrow -\frac{1}{4} > -\frac{1}{4}\ln 3 > -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{4} > 1 - \frac{1}{4}\ln 3 > \frac{1}{2}$

Donc $g(3) > 0$

$g(4) = 4 - \ln 4 - 4 = -\ln 4 < 0$

$g(3) > 0 > g(4)$ avec g continue sur $[3,4]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe <u>au moins</u> un réel $x_0 \in [3,4]$ tel que $g(x_0) = 0$ c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$

2. f est de façon évidente dérivable sur I. Encadrer $f'(x)$ pour $x \in I$

$f(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{4x}$

Pour $x \in [3,4],\ 3 \le x \le 4 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{3}$ car tout est positif

$\Rightarrow \dfrac{-1}{12} \le \dfrac{-1}{4x} \le \dfrac{-1}{16}$ c'est-à-dire $\dfrac{-1}{12} \le f'(x) \le \dfrac{-1}{16}$

3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une **unique** solution dans I .

$\forall x \in [3,\ 4],\ f'(x) = \dfrac{-1}{4x} < 0 \Rightarrow g'(x) < f'(x) < -1$

Donc g est donc strictement décroissante sur $[3,\ 4]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet x_0 pour **unique** solution.

Pour la suite on note s cette solution

4. Montrer que : $\forall (a,b) \in I^2 \quad |f(b) - f(a)| \le K \mid b - a \mid$ où K est une constante élément de $]0;1[$ que l'on précisera.

$\forall x \in [3,\ 4],\ \dfrac{-1}{12} \le f'(x) \le \dfrac{-1}{16}$

$\Rightarrow \dfrac{-1}{12} \le f'(x) \le\le 0$

$\Rightarrow \forall x \in I,\ |f'(x)| \le \dfrac{1}{12}$

De plus f est continue et dérivable sur I

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis

$\forall (a,\ b) \in I^2,\ |f(a) - f(b)| \le \frac{1}{12}|a - b|$

5. Soit U la suite définie par : $U_0 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f(U_n)$

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad | U_{n+1} - s | \le K \mid U_n - s \mid$

Pour utiliser la propriété précédente, il faut montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$

Par récurrence :

- Initialisation : $n = 0$
  $U_0 = 3 \in I$ Vrai pour $n = 0$
- Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ donné
  Or $(U_n,\ s) \in I^2$, donc d'après la question précédente

  $\Rightarrow f(4) \le f(U_n) \le f(3)$ car f décroissante

  $\Rightarrow U_{n+1} \in [f(4),\ f(3)]$

  Mq $f(4) \ge 3$ et $f(3) \le 4$:

  $f(4) - 3 = 4 - \frac{1}{4}\ln(4) - 3 = 1 - \frac{1}{2}\ln 2$

  Or $2 < \mathrm{e} \Rightarrow \ln 2 < 1 \Rightarrow \frac{-1}{2}\ln 2 > \frac{-1}{2}$

  $\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\ln 2 > \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow f(4) > 3$

  D'autre part

  $f(3) - 4 = 3 - \frac{1}{4}\ln(3) - 4 = -1 - \frac{1}{4}\ln(3) < 0$

  Donc $3 < f(4)$ et $f(3) < 4$ avec $U_{n+1} \in [f(4),\ f(3)] \subset [3,4]$

  $\Rightarrow U_{n+1} \in [3,\ 4]$

  La propriété est vraie au rang $n + 1$
- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in I$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$ et $s \in I$

Donc on peut remplacer (x, y) par (U_n, s)

en utilisant la question 4.b), on obtient :

$|f(U_n) - f(s)| \le K.|U_n - s|$

$\iff |U_{n+1} - s| \le K|U_n - s|$ car $f(s) = s$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad | U_n - s | \leq K^n$

Montrons-le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

- Initialisation : $n = 0$
  $U_0 = 3$ et $s \in [3, 4]$
  $\Rightarrow \quad 3 \leq s \leq 4 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq s - U_0 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |s - U_0| \leq 1 = K^0 \quad \Rightarrow$
  $|s - U_0| \leq K^0$
  Vrai pour $n = 0$
- Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ donné
  On a $\quad |U_n - s| \leq K^n$
  $\Rightarrow \quad K|U_n - s| \leq K^{n+1}$ car $K \geq 0$
  Or $\quad |U_{n+1} - s| \leq K|U_n - s|$ d'après 5)a)
  $\Rightarrow \quad |U_{n+1} - s| \leq K^{n+1}$
  La propriété est vraie au rang $n + 1$
- Conclusion : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ |U_n - s| \leq K^n$

Autre méthode plus rapide :

Posons $\quad V_n = \dfrac{U_n - s|}{K^n} \quad \iff \quad |U_n - s| = K^n V_n$

On a $\quad | U_{n+1} - s | \leq K | U_n - s |$

$\Rightarrow \quad K^{n+1} V_{n+1} \leq K.K^n V_n$

$\Rightarrow \quad V_{n+1} \leq V_n$ car $\quad K > 0$

La suite (V_n) est décroissante, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_n \leq V_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{|U_n - s|}{K^n} \leq |U_0 - s| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |U_n - s| \leq K^n$$

(c) Qu'en déduit-on concernant la suite U ?

On a $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |U_n - s| \leq K^n$

Or $\quad 0 \leq K < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} K^n = 0$

Donc par encadrement $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} |U_n - s| = 0 \quad \iff \quad \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = s}$

EXERCICE 2

1. Calculer pour x réel $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ en posant $u = 1 + t^2$

$u = 1 + t^2 \quad \mathrm{d}u = 2t\ \mathrm{d}t \quad$ Bornes : $\begin{cases} t = x & u = 1 + x^2 \\ t = 0 & u = 1 \end{cases}$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2} t\ \mathrm{d}t = \int_1^{1+x^2} \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2}\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{2} \int_1^{1+x^2} \frac{-1}{u^2}\ \mathrm{d}u$$
$$= \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{u} \right]_1^{1+x^2} = \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{1+x^2} - 1 \right]$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $\boxed{(1+x^2)^2\ y' + 2xy = x\ e^{\frac{1}{1+x^2}}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x^2 \neq 0$ Donc

$$(E) \quad \iff \quad (1+x^2)^2\ y' + 2xy = x\ e^{\frac{1}{1+x^2}}$$
$$\iff \quad y' + \frac{2x}{(1+x^2)^2}\ y = \frac{x\ \mathrm{e}^{\frac{1}{1+x^2}}}{(1+x^2)^2}$$

- EHA : $(E_0) \quad y' + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\ y = 0 \quad \iff \quad y' + a(x)\ y = 0$

  Avec $\quad a(x) = 2\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$

  D'après la question précédente, une primitive de a est

  $$A(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

  D'où $\quad y_0(x) = K\mathrm{e}^{-A(x)} = K \exp\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) \quad$ avec $K \in \mathbb{R}$
- Solution particulière

  On cherche une solution du type $\quad y_P(x) = C(x) \exp\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

  $$y_P'(x) = C'(x) \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + C(x) \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

  D'où

  $$(E) \quad \iff \quad C'(x) \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + C(x) \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$
  $$+ \frac{2x}{(1+x^2)^2} C(x) \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{x\ \mathrm{e}^{\frac{1}{1+x^2}}}{(1+x^2)^2}$$

$$\iff \quad C'(x)\exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{x\ \mathrm{e}^{\frac{1}{1+x^2}}}{(1+x^2)^2}$$

$$\iff \quad C'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

Donc $\quad C(x) = \dfrac{-1}{2(1+x^2)}\quad$ convient

$$y_p(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)}\exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

- Solution générale

$$y_G(x) = K\exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{-1}{2(1+x^2)}\exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$= \left[K - \frac{1}{2(1+x^2)}\right]\exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \quad \text{avec } K\in\mathbb{R}$$

EXERCICE 3

On admet que les conditions $\boxed{a_0 = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}\quad a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{a_n}}{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}}$

définissent bien une suite a à termes strictement positifs , et on pose

$\forall n\in\mathbb{N},\ \boxed{b_n = 2^n\ln(a_n)}$

1. Montrer que $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n = -\sum_{k=1}^n 2^k\ln\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\ln(a_{n+1}) = \ln\left(\frac{\sqrt{a_n}}{1-\frac{1}{2^{n+1}}}\right) = \ln\left(\sqrt{a_n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(a_n) - \ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

D'où

$$b_{n+1} = 2^{n+1}\ln(a_{n+1})$$
$$= 2^n\ln(a_n) - 2^{n+1}\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
$$= b_n - 2^{n+1}\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad b_{n+1}-b_n = -2^{n+1}\ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

D'où, en remplaant n par $k-1$, pour $k\geq 1$

$$-2^k\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right) = b_k - b_{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^n -2^k\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^n (b_k-b_{k-1}) = b_n - b_0 \quad \text{(par télscopage)}$$
$$= b_n \quad \text{car} \quad b_0 = 2^0\ln(a_0) = 0$$

D'où $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n = -\sum_{k=1}^n 2^k\ln\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)$

2. Montrer que $\quad \forall x\in[0;\frac{1}{2}]\quad x\leq -\ln(1-x)\leq x+x^2$

Posons $\quad g(x) = x+\ln(1-x)\quad$ et $\quad h(x) = x+x^2+\ln[1-x)\quad$ pour

$x \in [0,\ 1/2]$

g et h sont définie dérivables sur $[0;1/2]$

- $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1-x}\dfrac{-x}{1-x} < 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1/2$

  Sur $[0,1/2],\ g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante

  et comme $\quad g(0) = 0 \quad$ on a

  $\forall x \in [0,1/2],\ g(x) \leq 0 \quad$ et donc $\quad x \leq -\ln(1-x)$

- $\forall x \in [0,1/2]$,

$$h'(x) = 1 + 2x - \frac{1}{1-x} = \frac{(1+2x)(1-x)-1}{1-x}$$
$$= \frac{1-x+2x-2x^2-1}{1-x} = \frac{x-2x^2}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{1-x}$$

  Sur $[0,1/2],\ 1-2x \geq 0,\ x \geq 0,\ 1-x \geq 0$

  Donc $\quad h'(x) \geq 0 \quad$ et h est croissante. Or $\quad h(0) = 0$

  D'où $\quad h(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x \geq -\ln(1-x),\ \forall x \in [0,1/2]$

Les deux inégalités sont donc vérifiées

3. Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \leq b_n \leq n + 1 - \dfrac{1}{2^n}$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

- Initialisation : pour $n = 0,\ b_0 = 0,\ n + 1 - \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}$

  L'inégalité est vérifiées au rang $n = 0$

- Hérédité : supposons l'encadrement vrai à un rang $n \geq 0$ donné

  On a $\quad n \leq b_n \leq n + 1 - \dfrac{1}{2^n} \quad$ **(1)**

  D'après le calcul de la question 1), on a

$$b_{n+1} = b_n - 2^{n+1}\ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

  On a $\quad 2^{n+1} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \dfrac{1}{2^{n+1}} \leq \dfrac{1}{2}$

  On peut donc remplacer x par $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ dans l'encadrement du 2)

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq -\ln(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq -2^{n+1}\ln(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) \leq 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \textbf{(2)}$$

  En additionnant $\quad$ **(1)+(2)** :

$$n + 1 \leq b_n - 2^{n+1}\ln(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) \leq M_n$$

$$\iff \quad n + 1 \leq b_{n+1}\ln(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) \leq M_n \text{ avec}$$

$$M_n = (n + 1 - \frac{1}{2^n}) + (1 + \frac{1}{2^{n+1}}) = n + 2 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}})$$
$$= n + 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

  L'encadrement est donc vrai au rang $n+1$

- Conclusion : l'encadrement vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc pour $n \in \mathbb{N}^*$)

Autre méthode : on utilise la question 1. (Ce qui est plus dans l'esprit de l'exo)

On a $\quad \forall x \in [0; \frac{1}{2}] \quad x \leq -\ln(1-x) \leq x + x^2$

Or pour $k \geq 1,\ \dfrac{1}{2^k} \leq \dfrac{1}{2} \quad$ donc on peut remplacer x par $\dfrac{1}{2^k}$:

$$\frac{1}{2^k} \leq -\ln(1 - \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k} + (\frac{1}{2^k})^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq -2^k\ln(1 - \frac{1}{2^k}) \leq 1 + \frac{1}{2^k}$$

et on somme pour $k \in [[1,\ n]] \quad$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

$$\sum_{k=1}^{n} 1 \leq -\sum_{k=1}^{n} 2^k\ln(1 - \frac{1}{2^k}) \leq \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad n \leq b_n \leq n + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

avec $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/2 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 2(1/2 - (1/2)^{n+1}) = 1 - (1/2)^n$

D'où $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \leq b_n \leq n + 1 - \dfrac{1}{2^n}$

4. En déduire grâce à un encadrement de a_n que a converge et donner sa limite L

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a $\quad n \leq b_n \leq n + 1 - \dfrac{1}{2^n}$

$$\iff \quad n \leq 2^n\ln(a_n) \leq n + 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\iff \quad \frac{n}{2^n} \le \ln(a_n) \le \frac{n+1-1/(2^n)}{2^n} \quad \text{car } 2^n > 0$$

Quand $n \to +\infty$, $\dfrac{n}{2^n} \to 0$ (Croissance comparée)

Et $\dfrac{n+1-1/2^n}{2^n} = \dfrac{n}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{4^n} \to 0$

La suite $(\ln a_n)$ est encadrée par deux suites qui tendent vers 0

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e^0 = 1$ par continuité de la fonction *exp*

5. Déterminer un équivalent simple de $a_n - L$

On a $\dfrac{n}{2^n} \le \ln(a_n) \le \dfrac{n}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{4^n} \quad \Rightarrow \quad u_n \le a_n - 1 \le v_n$

avec $u_n = \exp\left(\dfrac{n}{2^n}\right) - 1$ et $v_n = \exp\left(\dfrac{n}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{4^n}\right) - 1$

et $\dfrac{n}{2^n} \to 0$, $\dfrac{n}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{4^n} \to 0$ quand $n \to +\infty$

Or $\exp(X) - 1 \sim X$ quand $X \to 0$

$\Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2^n}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n+1-1/2^n}{2^n}$

Or $n \to +\infty$ et $1 - 1/2^n \to 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - 1/2^n = o(n)$

$\Rightarrow n + 1 - 1/2^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \quad \Rightarrow \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2^n}$

Or $u_n \le a_n - 1 \le v_n \quad \Rightarrow \quad \dfrac{u_n}{n/2^n} \le \dfrac{a_n - 1}{n/2^n} \le \dfrac{v_n}{n/2^n}$ car $n/2^n > 0$

D'après les équivalents précédents $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n/2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n/2^n} = 1$

Donc, par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n - 1}{n/2^n} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2^n}$

PROBLEME

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx}$ $\boxed{J_n = (n+1)I_nI_{n+1}}$ et $\boxed{K_n = I_{2n}}$

1. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(x) - \cos^n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)(\cos(x) - 1)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or, pour $x \in [0, \pi/2]$, $\cos^n(x) \ge 0$ et $\cos(x) - 1 \le 0$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)(1 - \cos(x))\,\mathrm{d}x \le 0$ car $0 \le \pi/2$(BBS)

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \le I_n$

Donc la suite (I_n) est décroissante

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$

Posons $\begin{cases} u(x) = \cos^{n+1}(x) & u'(x) = -(n+1)\cos^n(x)\sin(x) \\ v'(x) = \cos x & v(x) = \sin x \end{cases}$

avec u, v C^1 sur $[0,\ \pi/2]$

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [\cos^{n+1}(x)\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n+1)\cos^n(x)\sin(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [\cos^{n+1}(\pi/2)\sin(\pi/2) - \cos^{n+1}(0)\sin(0)] \\ &\qquad + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= [0-0] + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)(1-\cos^2 x)\ \mathrm{d}x$$

$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$

$\Rightarrow \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$

$\Rightarrow \quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n \quad$ pour $n \in \mathbb{N}$

3. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et calculer J_n pour $n \in \mathbb{N}$

$J_n = (n+1)I_nI_{n+1}$

$\Rightarrow \quad J_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2}$

$= (n+2)I_{n+1}\dfrac{n+1}{n+2}I_n$

$= (n+1)I_{n+1}I_n$

$\Rightarrow \quad J_{n+1} = J_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc la suite (J_n) est constante

D'où $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ J_n = J_0 = (0+1)I_0I_1$

avec $\quad I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^0(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 1.\ \mathrm{d}x = \pi/2$

et $\quad I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^1(x)\ \mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1$

Donc $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \dfrac{\pi}{2}$

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n > 0$ (on commencera par prouver que $I_n \geq 0$)

Sur $[0,\ \pi/2],\ \cos x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \cos^n(x) \geq 0$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\ \mathrm{d}x \geq 0 \quad$ car $\quad 0 < \pi/2$ (BBS)

$\Rightarrow \quad I_n \geq 0$

D'autre part :

$J_n = (n+1)I_nI_{n+1} = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad (n+1)I_nI_{n+1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad I_n \neq 0$

Donc $\quad I_n > 0 \quad$ pour $n \in \mathbb{N}$

5. Utiliser notamment la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ montrer pour $n \in \mathbb{N}$, que $\quad \dfrac{n}{2n+1}J_{2n} \leq nK_n^2 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{2}J_{2n+1} \geq nK_n^2$

$K_n = I_{2n} \quad$ et $\quad J_n = (n+1)I_nI_{n+1} \quad \Rightarrow \quad J_{2n} = (2n+1)I_{2n}I_{2n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Par équivalences : il faut donc montrer

$\dfrac{n}{2n+1}(2n+1)I_{2n}I_{2n+1} \leq nI_{2n}^2$

$\iff \quad nI_{2n}I_{2n+1} \leq nI_{2n}^2$

$\iff \quad I_{2n+1} \leq I_{2n} \quad$ car $\quad nI_{2n} > 0$ pour $n > 0$

Ce qui est vrai car (I_n) est décroissante

Pour $n = 0$, l'inégalité est triviale

Donc la première inégalité est vérifiée

Montrons l'autre inégalité : $\quad \dfrac{1}{2}J_{2n+1} \geq nK_n^2$

Pour $n \in \mathbb{N}$

$nK_n^2 = nI_{2n}I_{2n}$

Or (I_n) est décroissante donc, pour $n \geq 1$

$I_{2n} \leq I_{2n-1}$

$\Rightarrow \quad nI_{2n}^2 \leq nI_{2n-1}I_{2n} \quad$ car $\quad nI_{2n} > 0$

$\Rightarrow \quad nI_{2n}^2 \leq \frac{1}{2}(2nI_{2n-1}I_{2n})$

Or $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ J_n = (n+1)I_nI_{n+1} \quad \Rightarrow \quad J_{2n-1} = 2n.I_{2n-1}I_{2n}$

$\Rightarrow \quad nI_{2n}^2 \leq \frac{1}{2}J_{2n-1}$

Or $\quad (J_n)$ est constante donc $\quad J_{2n-1} = J_{2n+1}$

D'où $\quad \dfrac{1}{2}J_{2n+1} \geq nK_n^2 \quad$ pour $n \geq 1$

Pour $n = 0 \quad \frac{1}{2}J_{2n+1} = \frac{1}{2}J_1 = \frac{\pi}{4}$ et $nK_n = 0$

L'inégalité est également vérifié

Donc $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{2}J_{2n+1} \leq \dfrac{n}{2n+1}J_{2n} \leq nK_n^2$

Remarque : autre démo pour la deuxième inégalité.

La deuxième inégalité donne, par équivalences :

$\dfrac{1}{2}J_{2n+1} \geq nK_n^2$

$\iff \quad \dfrac{1}{2}(2n+2)I_{2n+1}I_{2n+2} \geq nI_{2n}^2$

$$\iff \quad \frac{1}{2}(2n+2)I_{2n+1}\frac{2n+1}{2n+2}I_{2n} \geq nI_{2n}^2 \quad \text{en remplaçant } n \text{ par } 2n \text{ dans 2)}$$

$$\iff \quad \frac{1}{2}(2n+1)I_{2n+1}I_{2n} \geq nI_{2n}^2$$

$$\iff \quad (n+\frac{1}{2})I_{2n+1} \geq nI_{2n} \quad \text{car} \quad I_{2n} > 0$$

$$\iff \quad n(I_{2n+1} - I_{2n}) + \frac{1}{2}I_{2n+1} \geq 0$$

$$\iff \quad (2n+1)I_{2n+1} \geq (2n)I_{2n}$$

Il reste à montrer que la suite $(k.I_k)$ est croissante c'est-à-dire

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (k+1)I_{k+1} \geq kI_k \quad \text{par récurrence sur } k$$

- Vrai pour $k=0$
- supposons la relation vraie à un rang k donné
  $(k+2)I_{k+2} = (k+2)\dfrac{k+1}{k+2}I_k = (k+1)I_k \geq (k+1)I_{k+1}$

  Car la suite (I_n) est décroissante

  Vrai au rang $k+1$

Donc , $\forall k \in \mathbb{N},\ (k+1)I_{k+1} \geq kI_k$

D'où $\quad (2n+1)I_{2n+1} \geq (2n)I_{2n}$

La deuxième inégalité est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$

6. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nK_n^2$

D'après les inégalités précédentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n}{2n+1}J_{2n} \leq nK_n^2 \leq \frac{1}{2}J_{2n+1}$$

Or $\quad \dfrac{n}{2n+1}J_{2n} = \dfrac{n}{2n+1}\dfrac{\pi}{2} \sim \dfrac{n}{2n}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

et $\quad \dfrac{1}{2}J_{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$

Donc par encadrement (nK_n^2) converge et $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} nK_n^2 = \dfrac{\pi}{4}$

7. Montrer par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad K_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

- Initialisation : Pour $n=0$:
  $K_0 = I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\quad \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{4^0(0!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ Vrai pour $n=0$
- Hérédité : supposons la relation vraie à un rang n donné

  On a $\quad K_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
K_{n+1} &= I_{2n+2} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2}I_{2n} \quad \text{d'après I. 2)} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{(H.R)} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2}\cdot\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{4(n+1)^2}\cdot\frac{(2n+2)!}{4^n(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

  Relation vraie au rang $n+1$
- Conclusion : La relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Partie II

On considère la suite $\quad (U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\ e^n}$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \ln(U_{n+1}) - \ln(U_n)$ et la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $\quad f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}$

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 pour $f(x)$

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$$

$$\frac{2x}{2+x} = \frac{2x}{2(1+x/2)} = x\frac{1}{1+x/2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x/2} &= \frac{1}{1+X} \\
&= 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)
\end{aligned}$$

avec $\quad X = x/2 \to 0$ qd $x \to 0$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{2x}{2+x} = -x\frac{1}{1+x/2}$$
$$= -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

Or $\quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = (1/3 - 1/4)x^3 + o(x^3) = \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ simplifier $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ et vérifier que : $a_n = \left(n+\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)!\ \mathrm{e}^{n+1}}}{\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\ e^n}} = \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{n!\ e^n}{(n+1)!\ \mathrm{e}^{n+1}}$$
$$= \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}}$$
$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$a_n = \ln(U_{n+1}) - \ln(U_n) = \ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$$
$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1$$

D'autre part
$$\left(n+\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\ln(1+\tfrac{1}{n}) - \frac{2/n}{2+1/n}\right)$$
$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(1+\tfrac{1}{n}) - \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2}{2n+1}$$
$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\ln(1+\frac{1}{n}\right) - 1$$

L'égalité est donc vérifiée

3. En déduire l'existence d'une constante C strictement positive telle que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^2}$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^3 + o(x^3) \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{12}x^3$$

Quand $n \to +\infty$, $\dfrac{1}{n} \to 0 \quad \Rightarrow \quad f(\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12}\dfrac{1}{n^3}$ et $(n+\dfrac{1}{2}) \sim n$

$$\Rightarrow \quad a_n = (n+\tfrac{1}{2})f(\tfrac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1/12}{n^2}$$

On admet que dans ces conditions la suite $(A_n)_{n\geq 2}$ définie par $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ converge.

4. Simplifier A_n pour $n \geq 2$ et en déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $L > 0$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(U_{k+1} - \ln U_k) = \ln(U_n) - \ln(U_1) \quad \text{par télescopage}$$

avec $\quad u_1 = \dfrac{1^{3/2}}{1!e^1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \quad \Rightarrow \quad \ln(U_1) = -1$

Donc $\quad A_n = \ln(U_n) + 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(U_n) = A_n - 1 \quad \Rightarrow \quad U_n = \mathrm{e}^{A_n - 1}$

Notons ℓ la limite de (A_n)

Alors, par continuité de la fonction *exp*
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = L \quad \text{avec} \quad L = \mathrm{e}^{\ell-1} > 0$$

Partie III

1. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad nK_n^2 = \dfrac{\pi^2}{2}\dfrac{U_n^4}{U_{2n}^2}$

D'après I.7. $\quad K_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad nK_n^2 = n\frac{((2n)!)^2}{(4^n)^2(n!)^4}\frac{\pi^2}{4} = n\pi^2\frac{((2n)!)^2}{4^{2n+1}(n!)^4}$$

D'autre part :

$$\frac{\pi^2}{2}\frac{U_n^4}{U_{2n}^2} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\left(\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\ e^n}\right)^4}{\left(\dfrac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!\ e^{2n}}\right)^2} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\ e^n}\right)^4 \cdot \left(\frac{(2n)!\ e^{2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{n^{4n+2}}{(n!)^4 \ \mathrm{e}^{4n}} \cdot \frac{((2n)!)^2 \ e^{4n}}{(2n)^{4n+1}} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{((2n)!)^2}{(n!)^4} \cdot \frac{n^{4n+2}}{2^{4n+1}.n^{4n+1}}$$

$$= \pi^2 \cdot \frac{((2n)!)^2}{(n!)^4} \cdot \frac{n}{2^{4n+2}} = n\pi^2 \frac{((2n)!)^2}{(n!)^4} \cdot \frac{1}{4^{2n+1}}$$

L'égalité est donc vérifié

2. $\boxed{\text{En déduire une nouvelle expression de } \lim_{n\to+\infty} nK_n^2 \text{ en fonction de } L.}$

Quand $n \to +\infty$, $U_n \to L$ d'où $U_{2n} \to L$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{2}\frac{U_n^4}{U_{2n}^2} \to \frac{\pi^2}{2}\frac{L^4}{L^2} = \frac{\pi^2 L^2}{2}$$

Donc la suite (nK_n^2) converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nK_n^2 = \frac{\pi^2 L^2}{2}$

3. $\boxed{\text{Montrer que } L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$

On a vu en I.6 que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nK_n^2 = \frac{\pi}{4}$

Donc par unicité de la limite : $\displaystyle\frac{\pi^2 L^2}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad L^2 = \frac{1}{2\pi}$

$\Rightarrow \quad \displaystyle |L| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ avec $L = \mathrm{e}^{\ell - 1} > 0$

$\Rightarrow \quad \displaystyle L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$