Attention : 1er jet. N'hésitez pas à signaler des erreurs

Exercice 1 *Les 5 questions sont totalement indépendantes*

1) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0\}$
Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^3$

- $F \subset \mathbb{R}^3$
- $(0, 0, 0) \in F$.
- Stabilité par combinaison linéaire
  Soient $(u, v) \in F^2$ et $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.
  On pose $u = (x, y, z)$ $v = (x', y', z')$.
  Montrons que $a.u + b.v \in F$.
  Posons $w = au + b.v = (X, Y, Z)$
  $w = a.u + b.v = a.(x, y, z) + b.(x', y', z') = (ax + bx',\ ay + by',\ az + bz')$
  $$\begin{aligned} X + 2Y - 3Z &= (ax + bx') + 2(ay + by') - 3(az + bz') \\ &= a\underbrace{(x + 2y - 3z)}_{=0 \text{ car } u\in F} + b\underbrace{(x' + 2y' - 3z')}_{=0 \text{ car } v\in F} \\ &= 0 \end{aligned}$$
  Donc $a.u + b.v \in F$.
- Conclusion F est donc bien un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par
$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 3x + 2y - t = 0 \text{ et } 2x - y + t = 0\right\}$$
Déterminer une base et la dimension de F

- Soit $k = (x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$
  $$\begin{aligned} & k \in F \\ \iff & \begin{cases} 3x + 2y - t = 0 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{matrix} L_1 \\ L_1 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x & +2y & -t & = 0 \\ 5x & +y & & = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{matrix} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} -7x & & -t & = 0 \\ 5x & +y & & = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} t = -7x \\ y = -5x \end{cases} \\ \iff & k = (x,\ -5x,\ z,\ -7x) \\ & \quad = x.\underbrace{(1,\ -5,\ 0,\ -7)}_{=u_1} + z\underbrace{(0,\ 0,\ 1,\ 0)}_{=u_2} \\ \Rightarrow & k \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \end{aligned}$$
  Donc $F \subset \mathrm{Vect}(u_1,\ u_2)$
  Réciproquement :
  $u_1 = (1,\ -5,\ 0,\ -7)$ $\begin{cases} 3x + 2y - t = 3 - 10 + 7 = 0 \\ 2x - y + t = 2 + 5 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 \in F$
  $u_2 = (0, 0, 1, 0)$ $\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2 \in F$
  Donc $\mathrm{Vect}(u_1,\ u_2) \subset F$
  Finalement $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ $(u_1; , u_2)$ engendre F
- Est-ce une famille libre ?
  Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_2$ tel que $au_1 + b_2 = 0 \Rightarrow (a, b) = (0, 0)$
  . Donc (u_1, u_2) est libre
- (u_1, u_2) est une base de deux vecteurs de F. Donc $\dim F = 2$

3) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $\begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ 2x - z + 3t = 0 \end{cases}$
Déterminer une base et la dimension de F

- Soit $k = (x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$
  $$\begin{aligned} & k \in F \\ \iff & \begin{cases} x & +2z & -t & = 0 \\ 2x & -z & +3t & = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x & +2z & -t & = 0 \\ & -5z & +5t & = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{matrix} L_1 + L_2/5 \\ L_2/5 \end{matrix} \begin{cases} x & +z & & = 0 \\ & -z & +t & = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = -z \\ t = z \end{cases} \\ \iff & k = (x,\ y,\ z,\ t) = (-z,\ y,\ z,\ z) \\ & \quad = z(-1,\ 0,\ 1,\ 1) + y.(0,\ 1,\ 0,\ 0) \\ & \quad = z.u_1 + y.u_2 \\ \Rightarrow & k \in \mathrm{Vect}(u_1,\ u_2) \quad \text{avec} \quad u_1 = (-1,\ 0,\ 1,\ 1),\ u_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0) \end{aligned}$$

Donc $F \subset \text{Vect}(u_1,\ u_2)$

- D'autre part,

$u_1 = (-1,\ 0,\ 1,\ 1),\ \begin{cases} x + 2z - t = -1 + 2 - 1 = 0 \\ 2x - z + 3t = -2 - 1 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 \in F$

$u_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0),\ \begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ 2x - z + 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2 \in F$

Donc $\text{Vect}(u_1,\ u_2) \subset F$

D'où $F = \text{Vect}(u_1,\ u_2)$

$\Rightarrow$ $(u_1,\ u_2)$ engendre F

- Libre ?

Soit $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$

$au_1 + b_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (-a, b, a, a) = (0, 0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad a = b = 0$

Donc $(u_1,\ u_2)$ est libre

- $(u_1,\ u_2)$ est libre et engendre F

Donc $(u_1,\ u_2)$ est une base de F et $\dim F = 2$

4) Dans $\mathbb{R}^4$, on donne $u = (-1,\ 0,\ 2,\ 3) \quad v = (1,\ 0,\ 1,\ 1)$

Déterminer un système d'équation de $F = \text{Vect}(u, v)$

Soit $k = (x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$

$k \in \text{Vect}(u,\ v)$

$\iff \exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a.u + b.v + c.w = k$ (S)

avec

$$(S) \iff \begin{cases} -a & +b & = x \\ & 0 & = y \\ 2a & +b & = z \\ 3a & +b & = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} -a & +b & = & x & & \\ 3a & & = & -x & +z & \\ 4a & & = & -x & & +t \\ & 0 & = & y & & \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ 3L_3 - 4L_2 \\ L_4 \end{array} \begin{cases} -a & +b & = & x & & \\ 3a & & = & -x & +z & \\ & 0 & = & x & -4z & +3t \\ & 0 & = & y & & \end{cases}$$

Ce système échelonné admet (au moins) une solution $(a,\ b)$

$$\iff \begin{cases} x - 4z + 3t = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff k = (x,\ y,\ z) \in F$$

Donc F a pour équation $\begin{cases} x - 4z + 3t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

5) Dans $\mathbb{R}^3$, on donne $u = (1,\ 2,\ 4) \quad v = (2,\ 1,\ 5) \quad w = (-1,\ 3,\ 1)$

Montrer que (u, v, w) est une famille liée

Determiner la dimension de $F = \text{Vect}(u, v, w)$

- (u, v, w) liée ?

Soit $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$

$(S) \iff a.u + b.v + c.w = \vec{0}$

$$\iff \begin{cases} a & +2b & -c & = 0 \\ 2a & +b & +3c & = 0 \\ 4a & +5b & +c & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 4L_1 \end{array} \begin{cases} a & +2b & -c & = & 0 \\ & -3b & +5c & = & 0 \\ & -3b & +5c & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} 3L_1 + 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \begin{cases} 3a & 0 & +7c & = 0 \\ & -3b & +5c & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{cases}$$

Ce système échelonné admet (au moins) une solution $(a,\ b,\ c) \neq (0, 0, 0)$

Par exemple : pour $c = 3$, $(a,\ b,\ c) = (-7,\ 5,\ 3)$

$\Rightarrow \quad -7u + 5v + 3w = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad w = \dfrac{7}{3}u - \dfrac{5}{3}v$

- Dimension de $F = \text{Vect}(u, v, w)$?

w est CL de (u, v)

Donc $F = \text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$

Montrons que (u, v) est libre

$a.u + b.v = 0$

$\iff a.u + b.v + c.w = \vec{0}$ et $c = 0$

$\iff \begin{cases} 3a & 0 & +7c & = 0 \\ & -3b & +5c & = 0 \end{cases}$ et $c = 0$

$\iff \begin{cases} 3a & 0 & = 0 \\ & -3b & = 0 \end{cases}$

$\iff (a,\ b) = (0,\ 0)$

Donc $(u,\ v)$ est libre

D'où $(u,\ v)$ est une base de $\quad F = \mathrm{Vect}(u,\ v)$

Donc $\quad \dim F = 2$

Exercice 2 *A commencer sur une nouvelle page*

Pour $n \geq 1$, on pose $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \quad$ et $\quad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$

1) En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[n,\ n+1]$, donner un encadrement de $\quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Posons $\quad f(x) = \sqrt{x} \quad$ pour $x > 0$

f est continue et dérivable sur $[n,\ n+1]$ (pour $n \geq 1$)

$\forall x \in [n,\ n+1],\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

et $\quad n \leq x \leq n+1$

$\Rightarrow \quad 0 < 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{n+1}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \quad$ car tout est positif

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \quad$ pour $n \geq 1$

2) Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

- $u_{n+1} - u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2}\right) - \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$$

Or d'après la question précédente, en remplaçant n par $n+1$

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$

$\Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite (u_n) est croissante

- $v_{n+1} - v_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

Or d'après la question précédente

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \leq 0$

$\Rightarrow \quad v_{n+1} - v_n \leq 0$

La suite (v_n) est décroissante

- $v_n - u_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$

$$= 2(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= 2\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Quand $n \to +\infty,\ \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \to +\infty$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

- Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3) En déduire un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad$ en $+\infty$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (avec (u_n) croissantes

Donc (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite finie (inconnue) ℓ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_n$$

Cad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \leq \ell \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

$$S_n - 2\sqrt{n+1} \leq \ell \leq S_n - 2\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \quad -\ell - 2\sqrt{n+1} \le -S_n \le -\ell - 2\sqrt{n}$$
$$\Rightarrow \quad \ell + 2\sqrt{n} \le S_n \le \ell + 2\sqrt{n+1}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\ell}{\sqrt{n}} + 2 \le \frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \frac{\ell}{\sqrt{n}} + 2\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \quad \text{car } \sqrt{n} > 0$$

Or, quand $n \to +\infty$, $\dfrac{\ell}{\sqrt{n}} + 2 \to 2$

et $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} \to 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\ell}{\sqrt{n}} + 2\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \to 2$

Donc , par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$

Exercice 3 *A commencer sur une nouvelle page*

Soit u la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3^n \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$

On se propose dans la suite de déterminer l'expression de u_n en fonction de n de trois manières différentes. Les trois méthodes suivantes doivent donc <u>être traitées de façons totalement indépendantes</u>.

1) <u>1ère méthode</u>
Soit v la suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$

a) Donner la relation de récurrence liant v_{n+1} et v_n.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} \\ &= \frac{-2u_n + 3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{-2u_n}{3^{n+1}} + \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{-2}{3}\frac{u_n}{3^n} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{-2}{3}v_n + \frac{1}{3} \quad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

avec $v_0 = \dfrac{u_0}{3^0} = 0$

b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

On reconnaît une suite arithmético-géométrique

Posons a tel que

$$a = \frac{-2}{3}a + \frac{1}{3} \quad \textbf{(2)}$$

$$\iff \quad \frac{5}{3}a = \frac{1}{3} \quad \iff \quad a = \frac{1}{5}$$

$$\textbf{(1)-(2)} \quad \Rightarrow \quad v_{n+1} - a = \frac{-2}{3}(v_n - a)$$
$$\Rightarrow \quad v_n - a = \left(\frac{-2}{3}\right)^n (v_0 - a) = \left(\frac{-2}{3}\right)^n \left(\frac{-1}{5}\right)$$
$$\Rightarrow \quad v_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n$$
$$\Rightarrow \quad u_n = 3^n v_n = \frac{1}{5}\left(3^n - (-2)^n\right)$$

2) <u>2ème méthode</u>
On note maintenant w la suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^n w_n$

a) Donner la relation de récurrence liant w_{n+1} et w_n.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{(-2)^{n+1}} \\ &= \frac{-2u_n + 3^n}{(-2)^{n+1}} \\ &= \frac{-2u_n}{(-2)^{n+1}} + \frac{3^n}{(-2)^{n+1}} \\ &= \frac{-2(-2)^n w_n}{(-2)^{n+1}} + \frac{3^n}{(-2)^{n+1}} \\ &= w_n + \frac{3^n}{(-2)^{n+1}} \end{aligned}$$

Et $u_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_0 = 0$

b) En déduire l'expression de w_n en fonction de n

Par télescopage : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) = w_n - w_0 = w_n$

Mais par ailleurs, en utilisant ce qui précède

$$w_{k+1} - w_k = \frac{3^k}{(-2)^{k+1}}$$

D'où

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^k}{(-2)^{k+1}}$$
$$= \frac{-1}{2} \sum_{k=0}^{k-1} \left(\frac{-3}{2}\right)^k$$

Somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{-3}{2} \neq 1$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{1-(-3/2)^n}{1-(-3/2)}$$
$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{1-(-3/2)^n}{5/2}$$
$$\boxed{w_n = \frac{-1+(-3/2)^n}{5}}$$

c) En déduire l'expression u_n en fonction de n.

$$u_n = (-2)^n w_n$$
$$= (-2)^n \frac{-1+(-3/2)^n}{5}$$
$$= \frac{1}{5}\Big(-(-2)^n + ((-2)^n(-3/2)^n\Big)$$
$$= \frac{1}{5}\Big(-(-2)^n + 3^n\Big)$$

On retrouve le résultat précédent

3) 3ème méthode

a) Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Idée : il faut se débarrasser du terme 3^n :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3^n \quad \Rightarrow \quad 3^n = u_{n+1} + 2u_n \quad$ **(1)**

et $\quad u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3^{n+1}$
$$= -2u_{n+1} + 3.3^n$$
$$= -2u_{n+1} + 3.\big(u_{n+1} + 2u_n\big) \quad \text{d'après } \mathbf{(1)}$$
$$= u_{n+1} + 6u_n$$

b) En déduire l'expression u_n en fonction de n.

On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et d'équation caractéristique :

$$r^2 = r + 6 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 - r - 6 = 0$$

Racines évidentes : $r_1 = -2,\ r_2 = 3$

Donc il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A.(-2)^n + B.3^n$$
$$u_0 = 0, \quad u_1 = -2.0 + 3^0 = 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + 3B = 1 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} A + B = 0 \\ 5B = 1 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} 5L_1 - L_2 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 5A = -1 \\ 5B = 1 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = -1/5 \\ B = 1/5 \end{cases}$$

Donc $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{5}\big(-(-2)^n + 3^n\big)$

Problème : Étude d'une fonction intégrale

1. Donner le $DL_5(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3) \text{ en } 0$$

Quand $x \to 0,\ X = x^2 \to 0$

D'où

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$$
$$= 1 - x^2 + x^4 + o(x^5)$$

Retrouver ainsi le $DL_6(0)$ de $\arctan x$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Donc, par intégration :

$$\arctan x = \arctan 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $t + \arctan t = 0$

Posons $\varphi(t) = t + \arctan t$

φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes
Donc φ réalise une bijection
de $I =]-\infty,\ +\infty[$ sur $\varphi(I) =]\lim\limits_{-\infty}\varphi,\ \lim\limits_{+\infty}\varphi[=]-\infty,\ +\infty[$

Or $0 \in \varphi(I)$ Donc l'équation $t + \arctan t = 0$ admet une unique solution dans $I = \mathbb{R}$

De plus $\varphi(0) = 0$. Donc c'est 0 qui est l'unique solution de l'équation $t + \arctan t = 0$

3. On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t + \arctan t}$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$

Posons pour $t \neq 0$, $g(t) = \dfrac{1}{t + \arctan t}$

D'après la question précédente g est définie sur $\mathbb{R}^*$

- Pour $x > 0$
  $[x,\ 2x] \subset]0,\ +\infty[$
  g est donc définie et continue sur $[x,\ 2x]$ donc intégrable.
  $f(x)$ est bien définie pour $x > 0$
- Pour $x < 0$, $[2x,\ x] \subset]-\infty,\ 0[$
  g est donc définie et continue sur $[2x,\ x]$ donc intégrable.

Conclusion : f est définie sur $\mathbb{R}^*$

b) Étudier la parité de f

La fonction g est impaire, donc

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{-2x}^{-x} g(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-x}^{-2x} g(t)\ \mathrm{d}t = f(-x)$$

Donc la fonction f est paire

c) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer que

$$f'(x) = \frac{2}{2x + \arctan(2x)} - \frac{1}{x + \arctan(x)} \text{ pour } x > 0$$

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t + \arctan t}$ est définie et C^∞ sur $]0, +\infty[$

Donc elle admet une primitive G qui est C^∞ sur $]0, +\infty[$

Donc

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t)\ \mathrm{d}t = G(2x) - G(x)$$

Par composée de fonctions C^∞, f est donc C^∞ sur $]0, +\infty[$

Par dérivée des fonctions composées :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x)'G'(2x) - G'(x) \\ &= 2g(2x) - g(x) \\ &= \frac{2}{2x + \arctan(2x)} - \frac{1}{x + \arctan(x)} \end{aligned}$$

d) Montrer que f est croissante sur $]0,\ +\infty[$ et donner ses variations sur $]-\infty,\ 0[$

On se place sur $]0, +\infty[$

Il reste à étudier le signe de $f'(x)$:

- $$f'(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}\arctan(2x)} - \frac{1}{x + \arctan(x)}$$
  Il faut donc comparer $\frac{1}{2}\arctan(2x)$ et $\arctan(x)$
- Posons $\psi(x) = \frac{1}{2}\arctan(2x) - \arctan(x)$
  $$\begin{aligned} \psi'(x) &= \tfrac{1}{2} \times 2(\arctan)'(2x) - (\arctan)'(x) \\ &= \frac{1}{1 + (2x)^2} - \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$
  Avec $1 + (2x)^2 > 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad \psi'(x) < 0$
- $\Rightarrow$ ψ décroissante sur $]0, +\infty[$ avec $\psi(0) = 0$
  $\Rightarrow$ $\forall x > 0,\ \frac{1}{2}\arctan(2x) < \arctan(x)$
  $\Rightarrow$ $0 < x + \frac{1}{2}\arctan(2x) < x + \arctan(x)$
  $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{x + \frac{1}{2}\arctan(2x)} > \dfrac{1}{x + \arctan(x)}$
  $\Rightarrow$ $f'(x) > 0$
- f est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$
  Et f étant paire, elle est strictement décroissante sur $]-\infty,\ 0[$

4. On étudie le comportement de f au voisinage de $+\infty$

a) Montrer que pour pour tout $x > 0$,
$$\left|f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \leq \frac{\pi}{2} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

Pour $x > 0$,
$$f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_x^{2x} \frac{1}{t+\arctan t} - \frac{1}{t} \ \mathrm{d}t$$
$$= \int_x^{2x} \frac{-\arctan t}{t(t+\arctan t)} \ \mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow \quad \left|f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \leq \int_x^{2x} \left|\frac{-\arctan t}{t(t+\arctan t)}\right| \ \mathrm{d}t \quad \text{car} \quad x \leq 2x$$
Or $\quad t > 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\dfrac{-\arctan t}{t(t+\arctan t)}\right| = \dfrac{\arctan t}{t(t+\arctan t)}$

Et $\quad \arctan t > 0 \quad \Rightarrow \quad t + \arctan t > t \quad \Rightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{t(t+\arctan t)} < \dfrac{1}{t^2}$

et $\quad 0 < \arctan t < \pi/2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\arctan t}{t(t+\arctan t)} < \dfrac{\pi/2}{t^2}$ car tout est positif (on peut multiplier)
$$\Rightarrow \quad \int_x^{2x} \left|\frac{-\arctan t}{t(t+\arctan t)}\right| \ \mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} \frac{\pi/2}{t^2} \ \mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow \quad \left|f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \leq \frac{\pi}{2} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

b) En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$ et préciser sa valeur

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{-1}{2x} + \frac{1}{x} \to 0 \quad \text{quand } x \to +\infty$$

Donc par encadrement $\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) = 0$

< < < **Attention** : ne surtout pas écrire pour l'instant
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
car on sait pas si ces deux limites existent > > >

D'autre part, $\quad \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln 2$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \ln 2) = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2}$

5. On étudie le comportement de f au voisinage de 0^+

a) Montrer qu'il existe deux réels a, b tels que
$$\frac{1}{t+\arctan t} = \frac{a}{t} + bt + o(t) \quad \text{au voisinage de } 0^+$$

$$(\arctan)'(t) = \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$$
$$\Rightarrow \quad \arctan t = \arctan(0) + t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$
$$\Rightarrow \quad t + \arctan t = 2t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{t+\arctan t} = \frac{1}{2t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)} = \frac{1}{2t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)}$$
Or $\quad \dfrac{1}{1-u} = 1 + u + o(u) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)} = 1 + \dfrac{t^2}{6} + o(t^2)$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{t+\arctan t} = \frac{1}{2t}\left(1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right) = \frac{1}{2t} + \frac{t}{12} + o(t) = \frac{a}{t} + bt + o(t)$$
avec $\quad a = 1/2 \quad$ et $\quad b = 1/12$

b) Soient $h > 0$ et $\alpha > 0$ et g une fonction continue tels que
$$\forall t \in]0,\ h[, \ \left|\frac{g(t)}{t}\right| \leq \alpha$$
Déterminer alors une majoration (la plus précise possible) de $\dfrac{\left|\int_x^{2x} g(t) \ \mathrm{d}t\right|}{x^2}$ pour $x \in]0, h/2[$

$$\forall t \in]0,\ h[, \ \left|\frac{g(t)}{t}\right| \leq \alpha$$
$$\Rightarrow \quad |g(t)| \leq \alpha t \quad \text{pour } t \in]0,\ h[$$

$$\Rightarrow \quad \left|\int_x^{2x} g(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{2x} |g(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} \alpha t\ \mathrm{d}t \quad \text{car } x \leq 2x \text{ (BBS)}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\int_x^{2x} g(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \alpha \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^{2x} = \alpha\left[\frac{(2x)^2}{2} - \frac{x}{2}\right] = \alpha\frac{3x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left|\int_x^{2x} g(t)\ \mathrm{d}t\right|}{x^2} \leq \frac{3}{2}\alpha$$

c) En déduire que si h est une fonction continue de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = o(x)$ au voisinage de 0^+ alors $\displaystyle\int_x^{2x} h(t)\ \mathrm{d}t = o(x^2)$ au voisinage de 0^+

$h(x) = o(x) \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = 0$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$

Il existe donc $h > 0$ tel que $\forall x \in]0, h[, \dfrac{h(x)}{x} \leq \alpha$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left|\int_x^{2x} h(t)\ \mathrm{d}t\right|}{x^2} \leq \frac{3}{2}\alpha \quad \text{(en utilisant la question précédente)}$$

Posons maintenant $\quad \alpha = \dfrac{2}{3}\varepsilon$

On a donc $\quad \dfrac{\left|\int_x^{2x} h(t)\ \mathrm{d}t\right|}{x^2} \leq \varepsilon \quad$ pour $0 < x < h/2$

Donc $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\left|\int_x^{2x} h(t)\ \mathrm{d}t\right|}{x^2} = 0$

$$\Rightarrow \quad \int_x^{2x} h(t)\ \mathrm{d}t = o(x^2) \text{ en } 0^+$$

d) Montrer que f admet au voisinage de 0 un développement à l'ordre 2 que l'on exprimera

D'après la question 4.a), on a

$$\frac{1}{t + \arctan t} = \frac{a}{t} + bt + h(t) \quad \text{avec} \quad h(t) = o(t) \quad \text{en } 0^+$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = a\int_x^{2x} \frac{1}{t}\ dt + b\int_x^{2x} t\ dt + \int_x^{2x} h(t)\ dt$$

Et d'après la question précédente, $\quad \displaystyle\int_x^{2x} h(t)\ dt = o(x^2)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = a[\ln t]_x^{2x} + b[t^2/2]_x^{2x} + o(x^2)$$
$$= a\ln 2 + b\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$= \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{12}\cdot\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$
$$= \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

e) Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable.
Exprimer alors les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

D'après ce DL, on a $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \tfrac{\ln 2}{2}$

On peut donc prolonger f par continuité en posant $\quad f(0) = \tfrac{\ln 2}{2}$

De plus $\quad r(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\frac{1}{8}x^2 + o(x^2)}{x} = \dfrac{1}{8}x + o(x)$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\lim_{x\to 0} r(x) = 0$

Donc f est dérivable en 0 et $\quad f'(0) = 0$

f) Étudier, au voisinage de 0, la position relative de f et de sa tangente en 0

La tangente à C_f en 0 a pour équation $\quad y_T = f(0) + f'(0)(x - 0) = \frac{\ln 2}{2}$

$\Rightarrow \quad f(x) - y_T = \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \quad$ avec $\quad \frac{1}{8}x^2 > 0$

donc au voisinage de 0, $\quad f(x) > y_T$. $\quad$ La courbe C_f est au-dessus de sa tangente.

g) Déterminer un équivalent simple de $f'(x)$ en 0

Déterminer un équivalent simple de $f'(x)$ en 0

$$f'(x) = \frac{2}{2x + \arctan(2x)} - \frac{1}{x + \arctan(x)}$$

< < < **Remarque** :

$$\frac{2}{2x + \arctan(2x)} \sim \frac{2}{4x} = \frac{1}{2x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x + \arctan(x)} \sim \frac{1}{2x}$$

On ne peut donc pas soustraire les équivalents. On tente le DL à l'ordre suivant. > > >

$$f'(x) = \frac{2(x+\arctan x) - (2x+\arctan 2x)}{(2x+\arctan 2x)(x+\arctan x)}$$
$$= \frac{2\arctan x - \arctan 2x}{(2x+\arctan 2x)(x+\arctan x)}$$
$$= \frac{N(x)}{D(x)}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \quad 2\arctan x = 2x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \quad \arctan 2x = 2x - \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \quad N(x) = 2\arctan x - \arctan 2x = \frac{6x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \quad N(x) \sim 2x^3$$

$$D(x) = (2x+\arctan 2x)(x+\arctan x) \sim 4x\cdot 2x = 8x^2$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \sim \frac{2x^3}{8x^2} = \frac{1}{4}x$$

h) En déduire que f est deux fois dérivable en 0, et calculer $f''(0)$

On a donc $\quad \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0) \quad \Rightarrow \quad f'$ continue en 0

$$t(x) = \frac{f'(x) - f'(0}{x-0} = \frac{f'(x)}{x} \sim \frac{1}{4}$$

Donc, d'après la définition de la dérivée :

f' est dérivable en 0 et $\quad f''(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - f(0}{x-0} = \dfrac{1}{4}$

f est donc bien deux fois dérivable en 0