Exercice 1 *Les 5 questions sont totalement indépendantes*

1) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0\}$
Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^3$

- $F \subset \mathbb{R}^3$
- $(0, 0, 0) \in F$.
- Stabilité par combinaison linéaire
  Soient $(u, v) \in F^2$ et $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.
  On pose $\quad u = (x, y, z) \quad v = (x', y', z')$.
  Montrons que $\quad a.u + b.v \in F$.
  Posons $\quad w = au + b.v = (X, Y, Z)$
  $w = a.u + b.v = a.(x, y, z) + b.(x', y', z') = (ax + bx',\ ay + by',\ az + bz')$
  $$\begin{aligned} X + 2Y - 3Z &= (ax + bx') + 2(ay + by') - 3(az + bz') \\ &= a\underbrace{(x + 2y - 3z)}_{=0 \text{ car } u \in F} + b\underbrace{(x' + 2y' - 3z')}_{=0 \text{ car } v \in F} \\ &= 0 \end{aligned}$$
  Donc $\quad a.u + b.v \in F$.
- Conclusion : F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par
$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 3x + 2y - t = 0 \text{ et } 2x - y + t = 0\right\}$$
Déterminer une base et la dimension de F

- Soit $k = (x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$
  $$\begin{aligned} & k \in F \\ \iff & \begin{cases} 3x + 2y - t = 0 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{matrix} L_1 \\ L_1 + L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x + 2y - t = 0 \\ 5x + y = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{matrix} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} -7x - t = 0 \\ 5x + y = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} t = -7x \\ y = -5x \end{cases} \\ \iff & k = (x,\ -5x,\ z,\ -7x) \\ & \quad = x.\underbrace{(1,\ -5,\ 0,\ -7)}_{=u_1} + z\underbrace{(0,\ 0,\ 1,\ 0)}_{=u_2} \end{aligned}$$
  $\Rightarrow \quad k \in \text{Vect}(u_1, u_2)$
  Donc $\quad F \subset \text{Vect}(u_1,\ u_2)$
  Réciproquement :
  $u_1 = (1,\ -5,\ 0,\ -7) \quad \begin{cases} 3x + 2y - t = 3 - 10 + 7 = 0 \\ 2x - y + t = 2 + 5 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 \in F$
  $u_2 = (0, 0, 1, 0) \quad \begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u_2 \in F$
  Donc $\quad \text{Vect}(u_1,\ u_2) \subset F$
  Finalement $\quad F = \text{Vect}(u_1, u_2) \quad (u_1,\ u_2)$ engendre F
- Est-ce une famille libre ?
  Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\quad au_1 + bu_2 = 0$
  $\Rightarrow \quad (a, -5a, b, -7a) = (0, 0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad (a, b) = (0, 0)$
  Donc (u_1, u_2) est libre
- (u_1, u_2) est une base de deux vecteurs de F. Donc $\dim F = 2$

3) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $\begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ 2x - z + 3t = 0 \end{cases}$
Déterminer une base et la dimension de F

- Soit $k = (x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$
  $$\begin{aligned} & k \in F \\ \iff & \begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ 2x - z + 3t = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ -5z + 5t = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{matrix} L_1 + L_2/5 \\ L_2/5 \end{matrix} \begin{cases} x + z = 0 \\ -z + t = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = -z \\ t = z \end{cases} \\ \iff & k = (x,\ y,\ z,\ t) = (-z,\ y,\ z,\ z) \\ & \quad = z(-1,\ 0,\ 1,\ 1) + y.(0,\ 1,\ 0,\ 0) \\ & \quad = z.u_1 + y.u_2 \end{aligned}$$
  $\Rightarrow \quad k \in \text{Vect}(u_1,\ u_2) \quad$ avec $\quad u_1 = (-1,\ 0,\ 1,\ 1),\ u_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$
  Donc $\quad F \subset \text{Vect}(u_1,\ u_2)$
- D'autre part,

$u_1 = (-1,\ 0,\ 1,\ 1)$, $\left\{\begin{array}{l} x+2z-t = -1+2-1 = 0 \\ 2x-z+3t = -2-1+3 = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad u_1 \in F$

$u_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\left\{\begin{array}{l} x+2z-t = 0 \\ 2x-z+3t = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad u_2 \in F$

Donc $\quad \mathrm{Vect}(u_1,\ u_2) \subset F$

D'où $\quad F = \mathrm{Vect}(u_1,\ u_2)$

$\Rightarrow \quad (u_1,\ u_2)$ engendre F

- Libre ?

Soit $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$

$au_1 + b_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (-a, b, a, a) = (0,0,0,0) \quad \Rightarrow \quad a = b = 0$

Donc $\quad (u_1,\ u_2)$ est libre

- $(u_1,\ u_2)$ est libre et engendre F

Donc $(u_1,\ u_2)$ est une base de F et $\quad \dim F = 2$

4) Dans $\mathbb{R}^4$, on donne $u = (-1,\ 0,\ 2,\ 3) \quad v = (1,\ 0,\ 1,\ 1)$

Déterminer un système d'équation de $\quad F = \mathrm{Vect}(u, v)$

Soit $k = (x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4$

$k \in \mathrm{Vect}(u,\ v)$

$\iff \quad \exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\quad a.u + b.v + c.w = k \quad$ (S)

avec

$$(S) \quad \iff \quad \left\{\begin{array}{rrl} -a & +b & = x \\ & 0 & = y \\ 2a & +b & = z \\ 3a & +b & = t \end{array}\right.$$

$$\iff \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{rrcl} -a & +b & = & x \\ 3a & & = & -x + z \\ 4a & & = & -x + t \\ & 0 & = & y \end{array}\right.$$

$$\iff \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ 3L_3 - 4L_2 \\ L_4 \end{array} \left\{\begin{array}{rrcl} -a & +b & = & x \\ 3a & & = & -x + z \\ & 0 & = & x - 4z + 3t \\ & 0 & = & y \end{array}\right.$$

Ce système échelonné admet (au moins) une solution $(a,\ b)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{r} x - 4z + 3t = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \quad \iff \quad k = (x,\ y,\ z) \in F$$

Donc F a pour équation $\quad \left\{\begin{array}{r} x - 4z + 3t = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$

5) Dans $\mathbb{R}^3$, on donne $u = (1,\ 2,\ 4) \quad v = (2,\ 1,\ 5) \quad w = (-1,\ 3,\ 1)$

Montrer que (u, v, w) est une famille liée

Determiner la dimension de $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$

- (u, v, w) liée ?

Soit $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$

$(S) \quad \iff \quad a.u + b.v + c.w = \vec{0}$

$$\iff \quad \left\{\begin{array}{rrrl} a & +2b & -c & = 0 \\ 2a & +b & +3c & = 0 \\ 4a & +5b & +c & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 4L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{rrrcl} a & +2b & -c & = & 0 \\ & -3b & +5c & = & 0 \\ & -3b & +5c & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \quad \begin{array}{l} 3L_1 + 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{rrrl} 3a & 0 & +7c & = 0 \\ & -3b & +5c & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

Ce système échelonné admet (au moins) une solution $(a,\ b,\ c) \neq (0,0,0)$

Par exemple : pour $c = 3,\ (a,\ b,\ c) = (-7,\ 5,\ 3)$

$\Rightarrow \quad -7u + 5v + 3w = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad w = \dfrac{7}{3}u - \dfrac{5}{3}v$

- Dimension de $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$?

w est CL de (u, v)

Donc $\quad F = \mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathrm{Vect}(u, v)$

Montrons que (u, v) est libre

$a.u + b.v = 0$

$\iff \quad a.u + b.v + c.w = \vec{0} \quad$ et $\quad c = 0$

$\iff \quad \left\{\begin{array}{rrrl} 3a & 0 & +7c & = 0 \\ & -3b & +5c & = 0 \end{array}\right. \quad$ et $\quad c = 0$

$\iff \quad \left\{\begin{array}{rrl} 3a & 0 & = 0 \\ & -3b & = 0 \end{array}\right.$

$\iff \quad (a,\ b) = (0,\ 0)$

Donc $(u,\ v)$ est libre

D'où $(u,\ v)$ est une base de $\quad F = \mathrm{Vect}(u,\ v)$

Donc $\quad \dim F = 2$

Exercice 2 *A commencer sur une nouvelle page*

Pour $n \geq 1$, on pose $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \quad$ et $\quad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$

1) En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[n,\ n+1]$, donner un encadrement de $\quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $\quad f(x) = \sqrt{x} \quad$ pour $x > 0$

f est continue et dérivable sur $[n,\ n+1]$ (pour $n \geq 1$)

$\forall x \in [n,\ n+1],\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

et $\quad n \leq x \leq n+1$

$\Rightarrow \quad 0 < 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{n+1}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \quad$ car tout est positif

- f est continue sur $[n, n+1]$
- f est dérivable sur $]n, n+1[$
- $\forall x \in]n, n+1[,\ \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x,y) \in [n, n+1]^2 \text{ avec } x \neq y,\ \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Donc, en particulier pour $x = n+1,\ y = n$:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \quad$ pour $n \geq 1$

2) Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

- $u_{n+1} - u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2}\right) - \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$$

Or d'après la question précédente, en remplaçant n par $n+1$

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1}$

$\Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite (u_n) est croissante

- $v_{n+1} - v_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

Or d'après la question précédente

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \leq 0$

$\Rightarrow \quad v_{n+1} - v_n \leq 0$

La suite (v_n) est décroissante

- $v_n - u_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$

$$= 2(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= 2\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Quand $n \to +\infty,\ \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \to +\infty$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$

Autre méthode :

$v_n - u_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$

Or, d'après 1), $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \quad$ pour $n \geq 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{pour } n \geq 1$$

Avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Donc par encadrement, $(v_n - u_n)$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

- Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3) En déduire un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en $+\infty$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (avec (u_n) croissantes)

Donc (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite finie (inconnue) ℓ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_n$$

Cad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \leq \ell \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

$$S_n - 2\sqrt{n+1} \leq \ell \leq S_n - 2\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \quad -\ell - 2\sqrt{n+1} \leq -S_n \leq -\ell - 2\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \quad \ell + 2\sqrt{n} \leq S_n \leq \ell + 2\sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ell}{\sqrt{n}} + 2 \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\ell}{\sqrt{n}} + 2\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \quad \text{car } \sqrt{n} > 0$$

Or, quand $n \to +\infty$, $\displaystyle\frac{\ell}{\sqrt{n}} + 2 \to 2$

et $\displaystyle\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \to 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell}{\sqrt{n}} + 2\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \to 2$

Donc , par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$

Autre solution (plus simple) :

On a $v_n = S_n - 2\sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad S_n = v_n + 2\sqrt{n}$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \Rightarrow \quad v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$

$$\Rightarrow \quad v_n + 2\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

Exercice 3 *A commencer sur une nouvelle page*

Soit u la suite définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3^n \quad$ et $\quad u_0 = 0$

On se propose dans la suite de déterminer l'expression de u_n en fonction de n de trois manières différentes. Les trois méthodes suivantes doivent donc <u>être traitées de façons totalement indépendantes</u>.

1) <u>1ère méthode</u>

Soit v la suite telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$

a) Donner la relation de récurrence liant v_{n+1} et v_n.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{-2u_n + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{-2u_n}{3^{n+1}} + \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{-2}{3}\frac{u_n}{3^n} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{-2}{3}v_n + \frac{1}{3} \quad \textbf{(1)} \quad \text{avec} \quad v_0 = \frac{u_0}{3^0} = 0$$

b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

On reconnaît une suite arithmético-géométrique

Posons a tel que

$$a = \frac{-2}{3}a + \frac{1}{3} \quad \textbf{(2)}$$

$$\iff \quad \frac{5}{3}a = \frac{1}{3} \quad \iff \quad a = \frac{1}{5}$$

$$\textbf{(1)-(2)} \quad \Rightarrow \quad v_{n+1} - a = \frac{-2}{3}(v_n - a)$$

$$\Rightarrow \quad v_n - a = \left(\frac{-2}{3}\right)^n (v_0 - a) = \left(\frac{-2}{3}\right)^n \left(\frac{-1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad u_n = 3^n v_n = \frac{1}{5}\left(3^n - (-2)^n\right)$$

2) <u>2ème méthode</u>

On note maintenant w la suite telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^n w_n$

a) Donner la relation de récurrence liant w_{n+1} et w_n.

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{(-2)^{n+1}} = \frac{-2u_n + 3^n}{(-2)^{n+1}} = \frac{-2u_n}{(-2)^{n+1}} + \frac{3^n}{(-2)^{n+1}}$$

$$= \frac{-2(-2)^n w_n}{(-2)^{n+1}} + \frac{3^n}{(-2)^{n+1}} = w_n + \frac{3^n}{(-2)^{n+1}}$$

Et $\quad u_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_0 = 0$

b) En déduire l'expression de w_n en fonction de n

Par télescopage, pour $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) = w_n - w_0 = w_n$

Mais par ailleurs, en utilisant ce qui précède

$$w_{k+1} - w_k = \frac{3^k}{(-2)^{k+1}}$$

D'où, pour $n \geq 1$

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^k}{(-2)^{k+1}} = \frac{-1}{2}\sum_{k=0}^{k-1}\left(\frac{-3}{2}\right)^k$$

Somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{-3}{2} \neq 1$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{1-(-3/2)^n}{1-(-3/2)} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1-(-3/2)^n}{5/2} = \frac{-1+(-3/2)^n}{5}$$

Pour $n = 0$, $\dfrac{-1+(-3/2)^n}{5} = \dfrac{-1+1}{5} = 0 = w_0$

Donc $\quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{-1+(-3/2)^n}{5}}$

c) En déduire l'expression u_n en fonction de n.

$$u_n = (-2)^n w_n = (-2)^n \frac{-1+(-3/2)^n}{5} = \frac{1}{5}\Big(-(-2)^n + ((-2)^n(-3/2)^n\Big)$$

$$= \frac{1}{5}\Big(-(-2)^n + 3^n\Big)$$

On retrouve le résultat précédent

3) 3ème méthode

a) Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que,pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Idée : il faut se débarrasser du terme 3^n :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3^n \quad \Rightarrow \quad 3^n = u_{n+1} + 2u_n \quad$ **(1)**

et $\quad u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3^{n+1} = -2u_{n+1} + 3.3^n$

$\qquad = -2u_{n+1} + 3.\big(u_{n+1} + 2u_n\big) \quad$ d'après **(1)**

$\qquad = u_{n+1} + 6u_n$

b) En déduire l'expression u_n en fonction de n.

On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et d'équation caractéristique :

$$r^2 = r + 6 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 - r - 6 = 0$$

Racines évidentes : $\quad r_1 = -2,\ r_2 = 3$

Donc il existe $\quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \quad$ tel que $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A.(-2)^n + B.3^n$

$u_0 = 0, \quad u_1 = -2.0 + 3^0 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + 3B = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + 2L_1 \end{array} \begin{cases} A + B = 0 \\ 5B = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} 5L_1 - L_2 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} 5A = -1 \\ 5B = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A = -1/5 \\ B = 1/5 \end{cases}$$

Donc $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{5}\big(-(-2)^n + 3^n\big)$

Problème : Étude d'une fonction intégrale

1. Donner le $DL_5(0)$ de $\quad \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3) \quad \text{en } 0$$

Quand $x \to 0,\ X = x^2 \to 0$

D'où $\quad \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$

$\qquad = 1 - x^2 + x^4 + o(x^5)$

Retrouver ainsi le $\quad DL_6(0)$ de $\arctan x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ (\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \quad$ Donc, par intégration :

$$\arctan x = \arctan 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

< < < Attention : ne pas oublier d'écrire le terme constant : $\arctan 0$ > > >

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $t + \arctan t = 0$

Posons $\varphi(t) = t + \arctan t$

φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes
Donc φ réalise une bijection
de $I =]-\infty, +\infty[$ sur $\varphi(I) =]\lim\limits_{-\infty} \varphi, \lim\limits_{+\infty} \varphi[=]-\infty, +\infty[$

Or $0 \in \varphi(I)$ Donc l'équation $t + \arctan t = 0$ admet une unique solution dans $I = \mathbb{R}$

De plus $\varphi(0) = 0$. Donc c'est 0 qui est l'unique solution de l'équation $t + \arctan t = 0$

3. On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t + \arctan t}$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$

Posons pour $t \neq 0$, $g(t) = \dfrac{1}{t + \arctan t}$

D'après la question précédente g est définie sur $\mathbb{R}^*$

- Pour $x > 0$ $[x, 2x] \subset]0, +\infty[$
  g est donc définie et continue sur $[x, 2x]$ donc intégrable.
  $f(x)$ est bien définie pour $x > 0$
- Pour $x < 0$, $[2x, x] \subset]-\infty, 0[$
  g est donc définie et continue sur $[2x, x]$ donc intégrable.

Conclusion : f est définie sur $\mathbb{R}^*$

b) Étudier la parité de f

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t) \ \mathrm{d}t$$

On pose $u = -t \Rightarrow \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$ Bornes : $\begin{cases} t = -2x & u = 2x \\ t = -x & u = x \end{cases}$

$f(-x) = \displaystyle\int_x^{2x} g(-u)\ (-\,\mathrm{d}u) = \int_x^{2x} (-g(u))\ (-\,\mathrm{d}u)$ car g est impaire

$$= \int_x^{2x} g(u))\ \mathrm{d}u = f(-x)$$

Donc <u>la fonction f est paire</u>

c) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer que

$$f'(x) = \frac{2}{2x + \arctan(2x)} - \frac{1}{x + \arctan(x)} \text{ pour } x > 0$$

< < < On doit justifier que f est dérivable AVANT de la dériver. C'est logique > > >

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t + \arctan t}$ est définie et C^∞ sur $]0, +\infty[$

Donc elle admet une primitive G qui est C^∞ sur $]0, +\infty[$

Donc

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t) \ \mathrm{d}t = G(2x) - G(x)$$

Par composée de fonctions C^∞, f est donc C^∞ sur $]0, +\infty[$

Par dérivée des fonctions composées :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x)'G'(2x) - G'(x) \\ &= 2g(2x) - g(x) \\ &= \frac{2}{2x + \arctan(2x)} - \frac{1}{x + \arctan(x)} \end{aligned}$$

d) Montrer que f est croissante sur $]0, +\infty[$ et donner ses variations sur $]-\infty, 0[$

On se place sur $]0, +\infty[$

Il reste à étudier le signe de $f'(x)$:

- $f'(x) = \dfrac{1}{x + \frac{1}{2}\arctan(2x)} - \dfrac{1}{x + \arctan(x)}$

  Il faut donc comparer $\frac{1}{2}\arctan(2x)$ et $\arctan(x)$
- Posons $\psi(x) = \frac{1}{2}\arctan(2x) - \arctan(x)$

  $$\begin{aligned} \psi'(x) &= \tfrac{1}{2} \times 2(\arctan)'(2x) - (\arctan)'(x) \\ &= \frac{1}{1 + (2x)^2} - \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

  Avec $1 + (2x)^2 > 1 + x^2$ et tout est positif

  $\Rightarrow \dfrac{1}{1 + (2x)^2} < \dfrac{1}{1 + x^2} \Rightarrow \psi'(x) < 0$
- Donc ψ décroissante sur $]0, +\infty[$ avec $\psi(0) = 0$

  $\Rightarrow \forall x > 0, \ \frac{1}{2}\arctan(2x) < \arctan(x)$

$\Rightarrow \quad 0 < x + \frac{1}{2}\arctan(2x) < x + \arctan(x)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{x + \frac{1}{2}\arctan(2x)} > \dfrac{1}{x + \arctan(x)}$

$\Rightarrow \quad f'(x) > 0$

< < < Remarquer que f n'est pas définie en 0, par contre, ψ l'est parfaitement, donc on peut bien écrire $\psi(0)$ > > >

- f est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$
- Et f étant paire, elle est strictement décroissante sur $]-\infty, \ 0[$

4. On étudie le comportement de f au voisinage de $+\infty$

a) Montrer que pour pour tout $x > 0$, $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| \leq \frac{\pi}{2} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

Pour $x > 0$,

$$f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_x^{2x} \frac{1}{t + \arctan t} - \frac{1}{t} \ \mathrm{d}t$$

$$= \int_x^{2x} \frac{-\arctan t}{t(t + \arctan t)} \ \mathrm{d}t$$

Avec $\left| \displaystyle\int_x^{2x} \frac{-\arctan t}{t(t+\arctan t)} \ \mathrm{d}t \right| \leq \displaystyle\int_x^{2x} \left| \frac{-\arctan t}{t(t+\arctan t)} \right| \ \mathrm{d}t$ car $x \leq 2x$

Or $t > 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \dfrac{-\arctan t}{t(t+\arctan t)} \right| = \dfrac{\arctan t}{t(t+\arctan t)}$

Donc $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\arctan t}{t(t+\arctan t)} \ \mathrm{d}t$ **(1)**

D'autre part :

$\arctan t > 0$

$\Rightarrow \quad t + \arctan t > t > 0$

$\Rightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{t + \arctan t} < \dfrac{1}{t}$ car tout est positif

$\Rightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{t(t + \arctan t)} < \dfrac{1}{t^2}$ car $t > 0$

De plus $0 < \arctan t < \pi/2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\arctan t}{t(t+\arctan t)} < \dfrac{\pi/2}{t^2}$ car tout est positif (on peut multiplier)

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\arctan t}{t(t+\arctan t)} \ \mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} \frac{\pi/2}{t^2} \ \mathrm{d}t$ car $x \leq 2x$

$\Rightarrow \quad \left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| \leq \frac{\pi}{2} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ d'après **(1)**

b) En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$ et préciser sa valeur

$\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{-1}{2x} + \frac{1}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$

Donc par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right) = 0$

< < < **Attention** : ne surtout pas écrire pour l'instant

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

car on sait pas si ces deux limites existent > > >

D'autre part, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln 2$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \ln 2) = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2}$

5. On étudie le comportement de f au voisinage de 0^+

a) Montrer qu'il existe deux réels $a, \ b$ tels que

$$\frac{1}{t + \arctan t} = \frac{a}{t} + bt + o(t) \quad \text{au voisinage de } 0^+$$

$(\arctan)'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$

$\Rightarrow \quad \arctan t = \arctan(0) + t - \dfrac{t^3}{3} + o(t^3)$

$\Rightarrow \quad t + \arctan t = 2t - \dfrac{t^3}{3} + o(t^3)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{t + \arctan t} = \dfrac{1}{2t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)} = \dfrac{1}{2t} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)}$

Or $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + o(u) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)} = 1 + \dfrac{t^2}{6} + o(t^2)$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{t+\arctan t}=\frac{1}{2t}\left(1+\frac{t^2}{6}+o(t^2)\right)=\frac{1}{2t}+\frac{t}{12}+o(t)=\frac{a}{t}+bt+o(t)$$

avec $a=1/2$ et $b=1/12$

b) Soient $h>0$ et $\alpha>0$ et g une fonction continue tels que

$$\forall t\in]0,\ h[,\ \left|\frac{g(t)}{t}\right|\leq\alpha$$

Déterminer alors une majoration (la plus précise possible) de $\dfrac{\left|\int_x^{2x} g(t)\ \mathrm{d}t\right|}{x^2}$ pour $x\in]0,h/2[$

Soit $x\in]0,h/2[$

Pour tout $t\in[x,2x]$, on a $0<x\leq t\leq 2x<h$

$$\Rightarrow\quad \left|\frac{g(t)}{t}\right|\leq\alpha \quad\text{par hypothèse}$$

$$\Rightarrow\quad |g(t)|\leq\alpha t \quad\text{pour } t\in[x,\ 2x]$$

$$\Rightarrow\quad \left|\int_x^{2x} g(t)\ \mathrm{d}t\right|\leq\int_x^{2x}|g(t)|\ \mathrm{d}t\leq\int_x^{2x}\alpha t\ \mathrm{d}t \quad\text{car } x\leq 2x \text{ (BBS)}$$

Avec $\displaystyle\int_x^{2x}\alpha t\ \mathrm{d}t=\leq\alpha\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^{2x}=\alpha\left[\frac{(2x)^2}{2}-\frac{x}{2}\right]=\alpha\frac{3x^2}{2}$

D'où $\dfrac{\left|\int_x^{2x} g(t)\ \mathrm{d}t\right|}{x^2}\leq\dfrac{3}{2}\alpha$ pour $x\in]0,h/2[$

c) En déduire que si h est une fonction continue de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(x)=o(x)$ au voisinage de 0^+ alors $\displaystyle\int_x^{2x}h(t)\ \mathrm{d}t=o(x^2)$ au voisinage de 0^+

On a $h(x)=o(x)\quad\Rightarrow\quad \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{h(x)}{x}=0$

Soit $\varepsilon>0$ et $\alpha>0$

Il faut montrer que $\displaystyle\int_x^{2x}h(t)\ \mathrm{d}t=o(x^2)$ c'est-à-dire $\dfrac{\int_x^{2x}h(t)\ \mathrm{d}t}{x^2}\leq\varepsilon$

Or, par hypothèse $h(x)=o(x)\quad\Rightarrow\quad\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{h(x)}{x}=0$

Il existe donc $h>0$ tel que $\forall x\in]0,h[,\ \dfrac{h(x)}{x}\leq\alpha$

$$\Rightarrow\quad \frac{\left|\int_x^{2x}h(t)\ \mathrm{d}t\right|}{x^2}\leq\frac{3}{2}\alpha \quad\text{(en utilisant la question précédente)}$$

En choisissant $\alpha=\dfrac{2}{3}\varepsilon$

On a donc $\dfrac{\left|\int_x^{2x}h(t)\ \mathrm{d}t\right|}{x^2}\leq\varepsilon$ pour $0<x<h/2$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\left|\int_x^{2x}h(t)\ \mathrm{d}t\right|}{x^2}=0\quad\Rightarrow\quad\int_x^{2x}h(t)\ \mathrm{d}t=o(x^2)$ en 0^+

d) Montrer que f admet au voisinage de 0 un développement à l'ordre 2 que l'on exprimera

D'après la question 4.a), on a

$$\frac{1}{t+\arctan t}=\frac{a}{t}+bt+h(t)\quad\text{avec}\quad h(t)=o(t)\quad\text{en } 0^+$$

$$\Rightarrow\quad f(x)=a\int_x^{2x}\frac{1}{t}\ dt+b\int_x^{2x}t\ dt+\int_x^{2x}h(t)\ dt$$

Et d'après la question précédente, $\displaystyle\int_x^{2x}h(t)\ dt=o(x^2)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad f(x)&=a[\ln t]_x^{2x}+b[t^2/2]_x^{2x}+o(x^2)\\&=a\ln 2+b\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\\&=\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\\&=\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

e) Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable.
Exprimer alors les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

D'après ce DL, on a $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{\ln 2}{2}$

On peut donc prolonger f par continuité en posant $f(0)=\frac{\ln 2}{2}$

De plus $r(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\frac{1}{8}x^2+o(x^2)}{x}=\dfrac{1}{8}x+o(x)$

$$\Rightarrow\quad\lim_{x\to0}r(x)=0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$

f) Étudier, au voisinage de 0, la position relative de f et de sa tangente en 0

La tangente à C_f en 0 a pour équation $y_T = f(0) + f'(0)(x-0) = \frac{\ln 2}{2}$

$\Rightarrow \quad f(x) - y_T = \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \quad$ avec $\quad \frac{1}{8}x^2 > 0$

donc au voisinage de 0, $f(x) > y_T$. La courbe C_f est au-dessus de sa tangente.

g) Déterminer un équivalent simple de $f'(x)$ en 0

$$f'(x) = \frac{2}{2x+\arctan(2x)} - \frac{1}{x+\arctan(x)}$$

< < < **Remarque** :

$$\frac{2}{2x+\arctan(2x)} \sim \frac{2}{4x} = \frac{1}{2x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x+\arctan(x)} \sim \frac{1}{2x}$$

On ne peut donc pas soustraire les équivalents. On tente le DL à l'ordre suivant. > > >

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+\arctan x) - (2x+\arctan 2x)}{(2x+\arctan 2x)(x+\arctan x)} \\ &= \frac{2\arctan x - \arctan 2x}{(2x+\arctan 2x)(x+\arctan x)} \\ &= \frac{N(x)}{D(x)} \end{aligned}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$\Rightarrow \quad 2\arctan x = 2x - \dfrac{2x^3}{3} + o(x^3)$

$\Rightarrow \quad \arctan 2x = 2x - \dfrac{8x^3}{3} + o(x^3)$

$\Rightarrow \quad N(x) = 2\arctan x - \arctan 2x = \dfrac{6x^3}{3} + o(x^3)$

$\Rightarrow \quad N(x) \sim 2x^3$

$$D(x) = (2x+\arctan 2x)(x+\arctan x) \sim 4x\cdot 2x = 8x^2$$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)} \sim \dfrac{2x^3}{8x^2} = \dfrac{1}{4}x$

Autre méthode (plus rapide) : on peut utiliser le résultat de la question 4.a) :

D'après la question 4.a) , on a $\quad \dfrac{1}{t+\arctan t} = \dfrac{a}{t} + bt + o(t)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2t+\arctan 2t} = \dfrac{a}{2t} + b(2t) + o(2t)$ en remplacant t par $2t \to 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f'(x) &= 2\Big(\frac{a}{2t} + b(2t) + o(2t)\Big) - \Big(\frac{a}{t} + bt + o(t)\Big) \\ &= \Big(\frac{a}{t} + 4bt + o(t)\Big) - \Big(\frac{a}{t} + bt + o(t)\Big) \\ &= 3bt + o(t) \quad \text{avec} \quad b = 1/12 \\ &= \frac{1}{4}t + o(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{4}x$

h) En déduire que f est deux fois dérivable en 0, et calculer $f''(0)$

On a donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0) \quad \Rightarrow \quad f'$ continue en 0

$$t(x) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x-0} = \frac{f'(x)}{x} \sim \frac{1}{4}$$

Donc, d'après la définition de la dérivée :

f' est dérivable en 0 et $\displaystyle f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f(0}{x-0} = \frac{1}{4}$

f est donc bien deux fois dérivable en 0.

Musée des horreurs

Exercice 1

a) **Cohérence du vocabulaire**

On ouvre un chapitre sans fin. Il faut que ce que vous écrivez n maths soit d'abord cohérent au niveau de la syntaxe. Par exemple, il équivalence logique n'a lieu qu'entre deux propositions, et pas entre des ensemble par exemple.
Un vecteur ne peut être inclus dans un e.v., mais lui appartient (ou pas).
Un e.v. n'appartient pas à un autre e.v. Il peut être égal ou inclus dans un autre e.v. Etc.
suivent quelques exemples :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(u,v,w) \iff \mathrm{Vect}(u,v)}$$

Cela n'a aucun sens, car $\mathrm{Vect}(u,v,w)$ et $\mathrm{Vect}(u,v)$ sont des **ensembles**. Une équivalence logique ($\iff$) ne peut relier que des **propositions**, cad des trucs vrais ou faux.

$$\boxed{\mathrm{Vect}(u,v)\text{engendre } F}$$

C'est la **famille** (u,v) qui peut engendrer un **sev** F

$$\boxed{(u,v)\text{est une base de dimension 2 de } F}$$

Ce n'est pas la base qui est de dimension 2. On peut dire que la base est de **cardinal** 2 (ou bien qu'elle a deux vecteurs). Par contre, F est de dimension 2.

$$\boxed{\mathrm{Vect}(u,v) \text{ est une base de } F}$$

(u,v) est une base de F

$$\boxed{(u,v) \text{ sont libres}}$$

Ce ne sont pas les **vecteurs** qui sont libres mais la **famille** (u,v) qui est libre

$$\boxed{\mathrm{Vect}(u,v) = a.u + b.v}$$

- $\mathrm{Vect}(u,v)$ est un sev, c'est-à-dire un **ensemble** de vecteurs
- $a.u+b.v$ est un vecteur.

L'égalité est donc absurde.

Il ne faut pas confondre $a.u+b.v$

avec $\{a.u+b.v,\ (a,b)\in\mathbb{K}^2\} = \mathrm{Vect}(u,v)$

Les présence des accolades change la nature de l'objet : on passe d'un vecteur (sans les accolades) à un **ensemble** de vecteurs (avec les accolades)

$$\boxed{\mathrm{Vect}(u,v,w) \text{ est une base d'après ce que nous donne le sujet}}$$

Il est merveilleux que cela soit donné par le sujet. D'autant plus que cette phrase n'a aucun sens...

b) **Les phrases qui ne veulent rien dire**, parce qu'elles sont incomplètes ou carrément fausses :

$$\boxed{\text{Une famille est liée si elle admet une solution } (a,b,c)\neq(0,0,0)}$$

Cela ne veut rien dire ! Une solution de quoi ? Pour parler de solution il faut avoir une équation. Sinon cela n'a aucun sens.

$$\boxed{k\in\mathrm{Vect}(u,v) \iff \forall(a,b)\in\mathbb{K}^2,\ \forall(u,v)\in F,\ au+bv=k}$$

On a une équivalence entre deux propositions :

- $k\in\mathrm{Vect}(u,v)$
  On veut savoir à quelle condition un vecteur k donné appartient à $\mathrm{Vect}(u,v)$
  Donc cette proposition mathématique dépend de k,u et v
- $\forall(a,b)\in\mathbb{K}^2,\ \forall(u,v)\in F,\ au+bv=k$
  Il est alors totalement inutile et faux d'introduire dans la deuxième proposition u et v avec des **quantificateurs** car u et v sont déjà là, et sans quantificateurs, dans la première partie de équivalence.

  Par contre, (a,b) sont des petits nouveaux. Il est donc normal et même nécessaire qu'ils soient quantifiés.

Dernier point, et pas le moindre, la proposition est de toute façon fausse !

En effet : $k\in\mathrm{Vect}(u,v) \iff \exists(a,b)\in\mathbb{K}^2,\ au+bv=k$

Il serait en effet impossible d'avoir $au+bv=k$ pour **tous** les $(a,b)\in\mathbb{K}^2$

Un vecteur donné k ne peut être à lui tout seul égal à **toutes** les combinaisons linéaires de (u,v)

$$\boxed{\begin{array}{l}(u,v)\text{ libre ?}\\ \forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(u,v)\in F^2,\ au+bv=\vec{0}qif\ \dots\end{array}}$$

Même problème de quantification :

(u, v) sont déjà donnés
Donc écrire $\forall (u, v) \in F^2$ n'a aucun sens.

> Mq (u, v, w) est liée
> $\forall (a, b, c) \in \mathbb{K}^3,\ \exists (u, v, w) \in F\ \ldots$

Même problème. On ne doit pas quantifier (u, v, w)

> Soit $a.u + b.v + c.w = \vec{0}$

On écrit le mot clé « soit » quand on introduit de nouveaux objets. Cela correspond au « quelque soit » dans la définition.

Je sais bien que dans le langage courant le mot « soit » est parfois utilisé pour introduire une supposition (ou une hypothèse). Mais c'est une très mauvaise habitude. Et je pense que ce n'est pas correct, même dans le langage courant.

> (u, v, w) liée
> $\iff \quad \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tq $au + bv + cw = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Là, c'est de la totale bouillie pour les chat. C'est un salmigondis informe et indigeste.

> (u, v, w) liée $\iff$ $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ au + bv + cw = 0$ admet une solution autre que $(0, 0, 0)$ avec $a \neq 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$

- Tout d'abord, si c'est $\forall (a, b, c)$ ce n'est pas qu'il existe <u>une</u> autre solution que....

  On peut écrire correctement :

  (u, v, w) liée

  $\iff$ L'équation $au + bv + cw = 0$ admet (au moins) une solution $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

  Ce qui se traduit mathématiquement par

  $\exists (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tq $au + bv + cw = 0$

- Ensuite,

  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ **n'est pas équivalent** à $a \neq 0, b \neq 0$ ET $c \neq 0$

  Par exemple $(1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$

  On a $(a, b, c) \neq 0 \iff (a \neq 0$ OU $b \neq 0$ OU $c \neq 0)$

> $k = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$
> $k = \mathrm{Vect}(u, v)$

Il faut écrire $k \in \mathrm{Vect}(u, v)$

c) **Autres horreurs**

> $F \subset \mathrm{Vect}(u, v)$ donc (u, v) engendre F

Non ! (u, v) engendre $F \iff \mathrm{Vect}(u, v) = F$ L'inclusion ne suffit pas.

> $\begin{cases} a & +2b & -c & = 0 \\ & -3b & +5c & = 0 \end{cases}$ Ce système échelonné admet une infinité de solutions $\Rightarrow (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

L'implication est fausse. Puisque $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ est UNE des solutions du système.
Donc le système ne peut impliquer que (nécessairement) $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Le système est echelonné non triangulaire, donc **il existe** au moins **une** solution $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

> Soient $(u, v) \in F^2$ et $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.
> On pose $u = (x, y, z)$ $v = (x', y', z')$.
> $au + b.v = ax + by + cz + bx' + by' + cz'$
> $\iff au + bv = (X, Y, Z)$

Bah non !

L'égalité $au + b.v = ax + by + cz + bx' + by' + cz'$ est absurde puisque $au + bv \in \mathbb{R}^3$ et $ax + by + cz + bx' + by' + cz' \in \mathbb{R}$

> Cherchons une équation de $\mathrm{Vect}(u, v)$
>
> On a le système suivant :(S) $\iff \begin{cases} -a & +b & = x \\ & 0 & = y \\ 2a & +b & = z \\ 3a & +b & = t \end{cases}$

Sauf qu'on ne sait absolument pas d'où sort le système. **Quelle relation vectorielle** traduit-il ?

En algèbre linéaire (=espaces vectoriels et compagnie), on utilise très souvent des systèmes. Mais vous devez à chaque fois **bien commencer** et **bien terminer**

- Bien commencer : d'où vient le système que vous écrivez ? Quelle relation vectorielle traduit-il ?
- Bien terminer : une fois le système résolu, qu'est-ce que cela signifie en termes de vecteurs ou d'espaces vectoriels ?

Exercice 2

$$\frac{\ell}{\sqrt{n}}+2<\frac{S_n}{\sqrt{n}}<\frac{\ell}{\sqrt{n}}+2\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \quad \text{car } \sqrt{n}>0$$

Or $\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$

Donc $\dfrac{\ell}{\sqrt{n}}+2<\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}<\dfrac{\ell}{\sqrt{n}}+2$

Vous n'avez pas le droit de remplacer par un **équivalent** dans une **inégalité**.

D'ailleurs cela mène à un résultat absurde du genre $a<b<a$, puisque que $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ est encadré strictement par deux choses identiques.

En fait avec les équivalents, c'est assez simple : vous n'avez rien le droit de faire, **sauf ce qui est spécifiquement indiqué dans le cours**. Mais encore faut-il connaître son cours ...

Point de méthode essentiel :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq v_n-u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Donc par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

Horreur. Ici sont mélangées les prémisses et la conclusion.

Dans toute propriété ou théorème , il y a

- Des **prémisses** : ce sont les conditions de validité du théorème
- Une (ou des) **conclusion(s)** : le résultat obtenu

Par exemple dans le théorème d'encadrement.

- Les **prémisses** sont

$u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n à partir d'un certain rang

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

- La **conclusion** est

(v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

Dans la rédaction, il faut donc établir **d'abord** les prémisses, et **ensuite** donner la conclusion. Sinon c'est de la bouillie pour les chats (BPC)

Un nouveau concept :

$f(t)=\sqrt{t}$ $\quad f$ est continue et centrée

Continue : jusque là ça. Je connais.

« centrée » ? C'est quoi. C'est une notion qui n'est inconnue. Ce doit être nouveau. je suis impatient d'en connaître la définition.

$$v_n=S_n-2\sqrt{n} \quad\Rightarrow\quad S_n-2\sqrt{n}\to\ell$$

Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell+2\sqrt{n}$

- Comment passe-t-on de de $S_n-2\sqrt{n}$ à S_n ?
- En additionnant $2\sqrt{n}$
- Or que sait-on sur la somme d'équivalent ?
- **On n'a pas le droit**, sauf en justifiant précisément.

Dans mon immense bonté, je rappelle que c'est possible **uniquement** dans deux cas :

- Équivalents de même nature

$f\sim a.h$ et $g=b.h$ avec $a+b\neq 0$

$\Rightarrow \quad f+g\sim(a+b)h$

- Négligeabilité :

$f=o(g) \quad\Rightarrow\quad f+g\sim f$

(On a même équivalence logique : $f=o(g) \iff f+g\sim f$

Remarquons aussi que, lorsque qu'on demande un équivalent, on essaie de donner l'équivalent **le plus simple possible**. Ce qui n'est pas le cas ici de $\ell+2\sqrt{n}$

Encore de la BPC

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x\in]n,n+1[,|f'(x)|\leq M \text{ et } f(n+1)-f(n)|\leq M|n+1-n|$$

Encore une fois on mélange

- les **prémisses**, dont fait partie $\forall x \in]n, n+1[, |f'(x)| \leq M$
- avec la **conclusion** : $f(n+1) - f(n)| \leq M|n+1-n|$

Grand prix de l'HORREUR ABSOLUE

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ell + 2\sqrt{n} = 2\sqrt{n}}$$

La limite , quand $n \to +\infty$ ne doit **jamais** dépendre de n
De même

- Une limite quand $x \to 0$ ne doit **jamais** dépendre de x
- La valeur d'une intégrale ne dépend jamais de la variable d'intégration
- La valeur d'une somme ne dépend jamais de l'indice de sommation

f est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$

D'après l'IAF $\quad m \leq \dfrac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} \leq M$

Là, il manque la moitié des prémisses.

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{n+1} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{car } \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } [n, n+1] \end{aligned}$$

- Premier point :

  La fonction $x \mapsto 1/x$ est appliquée sur des éléments qui sont dans
  $$\left[\frac{1}{2\sqrt{n+1}}, \frac{1}{2\sqrt{n}}\right]$$
  et non dans $[n, n+1]$ Donc il faudrait dire

  « car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}, \dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right]$ »
- Mais pourquoi s'enquiquiner inutilement :

  Tous les termes sont positifs

  et la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $]0, +\infty[$

  Et cela suffit.
- Notons enfin que la phrase « $1/x$ est décroissante » n'a aucun sens.

  $1/x$ est seulement l'inverse de x, donc un réel.

C'est la **fonction** $x \mapsto 1/x$ qui est décroissante sur $]0, +\infty[$

Car $\dfrac{1}{x}$ est décroissante

Même problème que précédemment : on doit parler de la **fonction** $x \mapsto 1/x$

D'autre part, cela ne suffit pas car l'**ensemble** sur lequel la fonction est décroissante n'est pas précisé

La fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

Par contre, elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ (Par exemple : $-1 < 1$ mais $f(-1) < f(1)$)

Exercice 3

J'ai eu droit à une « suite arthritique »

Mais je n'en suis pas sûr. C'était écrit par Jules...

$$w_{n+1} = w_n + \frac{3^n}{(-2)^{n+1}}$$

Donc (w_n) est une suite arithmétique

Pour que (w_n) soit arithmétique, il faut avoir $w_{n+1} = w_n + r$ avec r **constante** par rapport à n. Ce qui n'est pas le cas ici. (Sinon toutes les suites seraient arithmétiques, car on peut toujours écrire $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n + r_n$)

Problème

Erreur fondamentale :

$f(x) = G(2x) - G(x)$

Donc $\quad f'(x) = G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x)$

Il ne faut surtout pas confondre $G'(2x)$ avec $\big(G(2x)\big)'$

On a $G'(x) = g(x)$ donc $G'(2x) = g(2x)$

Par contre par composée $\big(G(2x)\big)' = (2x)'G'(2x) = 2g'(2x)$

Donc les égalités sont deux fois fausses !

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t) \ \mathrm{d}t$$

g est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$
g est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$
g est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ donc f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$

Aucune de ces propositions n'est vraie.

Il n'y a aucun lien immédiat entre les propriétés de g et celles de f

- Exemple 1 : $f_1(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} g(t) \ \mathrm{d}t$ avec g définie continue sur $\mathbb{R}^*$

  Dans ce cas, f_1 est définie sur $]-\infty, -1[\cap]0, +\infty[$ (Remarquer que f n'est pas non définie seulement en -1 et 0)

- Exemple 2 : $f_2(x) = \displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} g(t) \ \mathrm{d}t$ avec g définie continue sur $\mathbb{R}$

  Dans ce cas, f_2 est discontinue en tout x entier (à cause de la partie entière)

- Exemple 3 : $f_3(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} g(t) \ \mathrm{d}t$ avec g C^∞ sur $\mathbb{R}$

  Dans ce cas, f_3 n'est pas dérivable a priori en 0 à cause de la racine. (Dans certains cas, elle peut être dérivable : à étudier au cas par cas)

Évidemment, ce sont des cas un peu exotiques. Mais cela montre bien le point suivant :

Morale de l'histoire : les propriétés de g ne se transmettent pas « naturellement » à f. Il faut à chaque fois démontrer la chose.