Exercice 6

Avertissement : j'ai utilisé dans la correction les procédures « standard » qui marchent bien la plupart du temps.

Mais dans un certain nombre de question, il y avait des méthodes plus rapides.

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction de courbe C_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = x - n.\ln(x)$$

1. a. Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

f_n est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 0$$

Limites

Quand $x \to 0^+$, $\ln x \to -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) \to +\infty$

Quand $x \to +\infty$, $\ln x = o(x) \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \sim x \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$n.(1-\ln n)$	$\nearrow$	$+\infty$

b. En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $\quad f_n(x) = 0 \quad$ et vérifiant $\quad 0 < u_n < n < v_n$

- $f_n(n) = n.(1 - \ln n)$

  Pour $n \geq 3$, $n > e \Rightarrow \ln n > 1$

  $\Rightarrow \quad f_n(n) = n.(1 - \ln n) < 0.$

- f_n est continue strictement décroissante sur $]0, n[$

  donc f_n établit une bijection de $]0, n[$ sur $\quad f_n(]0, n[) =]f_n(n), +\infty[$

  Or $\quad f_n(n) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \in f_n(]0, n[)$

  Il existe donc un unique réel $u_n \in]0, n[$ tel que $\quad f_n(u_n) = 0.$

- De même, f_n est continue strictement croissante sur $]n, +\infty[$ donc elle établit une bijection de $]n, +\infty[$ sur $]f_n(n), +\infty[$ et $0 \in f_n(]0, n[)$

  Il existe donc un unique réel $v_n \in]n, +\infty[$ tel que $f_n(v_n) = 0.$

- On a donc finalement : $0 < u_n < n < v_n \quad$ pour $n \geq 3$

Remarques

- Le théorème de la bijection doit être absolument su et **rédigé correctement**. La rédaction en est précise et standard. On ne doit pas tortiller du popotin, la route est droite ! (Version convenable du célèbre adage).
- Quand on utilise le « théorème de la **bijection** », il faut faire apparaître une bijection. Cela semble du bon sens, et puisque :

  « Le bon sens est la chose du monde la mieux partagée ; car chacun pense en être si bien pourvu, que ceux mêmes qui sont les plus difficiles à contenter en toute autre chose n'ont point coutume d'en désirer plus qu'ils en ont. »

  Cela dit, cette phrase de l'ami Descartes m'a toujours semblé pleine d'ironie...
- Quand on parle de bijection, il faut préciser l'**ensemble de départ** ET l'**ensemble d'arrivé**. Sinon la définition de bijection n'a aucun sens.
- Enfin, le TVI ne suffit pas à donner toutes les solutions d'une équation. Il permet seulement d'établir l'existence d'**au moins** une solution dans un intervalle donné, mais ne dit rien sur l'existence éventuelle d'**autres solutions** dans ce même intervalle.

  Et ici, noter u_n une des deux solutions sur $]0, +\infty[$ n'a de sens que si u_n est bien défini. C'est-à-dire que u_n est LA solution dans l'intervalle $]0, n]$. Il faut donc qu'il existe une **unique** solution sur l'intervalle $]0, n]$

  Dans le cas contraire, si l'équation $f_n(x) = 0$ admettait deux solutions (ou plus) dans $]0, n]$, la notation u_n serait incorrecte. En effet, elle renverrait à une des deux solutions, sans savoir laquelle des deux. Donc la notation u_n serait indéfinie. Et ça en maths, c'est beurk !

c. Étudier la position relatives des courbes C_n et C_{n+1}

C_{n+1} est au-dessus de C_n

$\Longleftrightarrow \quad f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

$\Longleftrightarrow \quad x - (n+1).\ln(x) \geq x - n.\ln x$

$\Longleftrightarrow \quad 0 \geq \ln x$

$\Longleftrightarrow \quad 1 \geq x$

- Sur $]0, 1[$, C_{n+1} est au-dessus de C_n
- Sur $]1, +\infty[$, C_{n+1} est au-dessous de C_n

Ce qu'on peut résumer ainsi :

x	0	1	$+\infty$
	$\dfrac{C_{n+1}}{C_n}$	|	$\dfrac{C_n}{C_{n+1}}$

2. Étude de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.

a. Montrer que $\forall n \geq 3, \quad 1 < u_n < e$.

$f_n(1) = 1$ et $f_n(e) = e - n < 0$ (car $n \geq 3 > e$) et $f_n(u_n) = 0$

Donc : $f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(e)$

De plus : $1 \in]0, n], \ u_n \in]0, n], \ e \in]0, n]$

et f_n est strictement décroissante sur $]0, n]$

Donc : $1 < u_n < e$

Remarques

- Inutile d'utiliser ici à nouveau le théorème de la bijection. Le fait que f_n soit strictement décroissante suffit pour avoir l'**équivalence** :
$$\forall (a, b) \in]0, n]^2, \quad a < b \iff f_n(a) > f_n(a)$$
- Par contre, il faut absolument vérifier (et l'écrire) que les réels auxquels sont appliqué f_n (c'est-à-dire ici : 1, u_n, e) sont bien dans l'intervalle sur lequel f_n est strictement décroissante.

b. Montrer que (u_n) est décroissante. (En utilisant 1.c) par exemple)

(Procédure standard)

D'après 1.c) $\forall x > 1, \ f_{n+1}(x) < f_n(x)$

Or $u_n > 1$ Donc on peut remplacer x par u_n :

$$f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n) \quad \textbf{(1)}$$

Or, par définition de u_n : $\forall n \geq 3, \ f_n(u_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$

Donc **(1)** $\iff f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$

Avec f_{n+1} strictement décroissante sur $]0, n]$

Or u_n et u_{n+1} appartiennent à $[1, \ e] \subset]0, \ 3] \subset]0, \ n]$ (car $3 \leq n$)

Donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad u_n < u_{n+1}$

La suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge et déterminer $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1.

Elle converge donc vers une limite ℓ tel que

$$\forall n \geq 3, \ u_n \geq \ell \geq 1$$

Procédure standard :

En appliquant la fonction f_n qui est strcitement décroissante sur $]0, n]$:

$$f_n(u_n) \leq f_n(\ell) \leq f_n(1)$$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \ell - n \ln \ell \leq 1$

On a $\ell \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \ln \ell \geq 0$

Par l'absurde, supposons $\ell > 1$

Dans ce cas, $\ln \ell > 1 \quad \Rightarrow \quad \ell - n \ln \ell \to -\infty$ quand $n \to +\infty$

Ce qui est contradiction avec $\forall n \geq 3, \ 0 \leq \ell - n \ln \ell$

Donc $\ell = 1$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

d. Montrer que $u_n - \ell \sim \dfrac{1}{n}$.

Il faut donc montrer que $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$

La seule chose (ou presque) que nous savons de (u_n) est que :

$$f_n(u_n) = 0$$

$\iff \quad u_n - n \ln(u_n) = 0$

$\Rightarrow \quad u_n = n \ln(u_n)$

Qaund $n \to +\infty, \ u_n \to 1 \quad \Rightarrow \quad \ln u_n \sim u_n - 1$

$\Rightarrow \quad u_n \sim n(u_n - 1)$

Or $u_n \to 1 \quad \Rightarrow \quad u_n \sim 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \sim n(u_n - 1) \quad \Rightarrow \quad u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$

3. Étude de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$

a. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

On a d'après 1.b) $\forall n \geq 3, \ 0 < u_n < n < v_n$

Or $n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n > 2\ln(n)$.

Montrons-le pour tout $x > 0$

Posons la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = x - 2\ln(x)$

ô merveille ! Nous retrouvons sur la fonction f_2

D'après la question 1.a), la fonction f_2 atteint son minimum en 2

avec $f_2(2) = 2(1 - \ln 2)$ et $2 < e \Rightarrow \ln 2 < 1 \Rightarrow f_2(2) > 0$

Donc $\forall x > 0,\ g(x) \geq g(2) > 0$

$\Rightarrow \forall x > 0,\ x - 2\ln x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 2\ln x$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > 2\ln n$

c. $\boxed{\text{Établir que : } \quad n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)}$

La fonction f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$

Or, pour $n \geq 3,\ n\ln n > n, 2n\ln n > 3$ et $v_n > n$ (On est dans le bon intervalle)

Donc, par équivalences

$$n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)$$
$$\iff \quad f_n(n\ln(n)) < f_n(v_n) < f_n(2n.\ln(n))$$
$$\iff \quad f_n(n\ln(n)) < 0 < f_n(2n.\ln(n))$$

Il reste à le vérifier :

$$\begin{aligned} f_n(n\ln n) &= n\ln n - n.\ln(n\ln n) = n\ln n - n(\ln n + \ln\ln n) \\ &= -n\ln(\ln n) \end{aligned}$$

Or $n \geq 3 > \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad \ln n > 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(\ln n) > 0$

$\Rightarrow \quad f_n(n\ln(n)) < 0$

D'autre part :

$$\begin{aligned} f_n(2n.\ln(n)) &= 2n\ln n - n\ln(2n\ln n) \\ &= 2n\ln n - n(\ln 2 + \ln n + \ln\ln n) \\ &= 2n\ln n - n\ln 2 - n\ln n - n\ln\ln n) \\ &= n\ln n - n\ln 2 - n\ln\ln n) \\ &= n\big(\ln n - \ln 2 - \ln\ln n\big) \\ &= n\big(\ln n - \ln(2\ln n)\big) \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente

$$n > 2\ln n \quad \Rightarrow \quad \ln n > \ln(2\ln n) \quad \Rightarrow \quad \ln n - \ln(2\ln n) > 0$$

$\Rightarrow \quad f_n(2n.\ln(n)) > 0$

On a donc $f_n(n\ln(n)) < 0 < f_n(2n.\ln(n))$

$\iff \quad n\ln n < v_n < 2n.\ln n \quad$ pour $n \geq 3$

d. $\boxed{\text{Montrer enfin que : } \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)}$

Si on divise par $n\ln n > 0$ on obtient : $1 < \dfrac{v_n}{n\ln n} < 2$

Ce qui est joli mais ne permet pas de conclure grand chose (si ce n'est que le quotient est borné)

Or $f_n(v_n) = v_n - n\ln v_n = 0$

$\Rightarrow \quad v_n \sim n\ln v_n$

Or $n\ln n < v_n < 2n.\ln n$

$\Rightarrow \quad \ln(n\ln n) < \ln v_n < \ln(2n\ln v_n)$

$\Rightarrow \quad \ln n + \ln\ln n < \ln v_n < \ln 2 + \ln v_n + \ln\ln v_n$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{1 + \frac{\ln\ln n}{\ln n}}_{=w_n} < \frac{\ln v_n}{\ln n} < \underbrace{1 + \frac{\ln\ln n}{\ln n} + \frac{\ln 2}{\ln n}}_{=t_n}$$

On a $\dfrac{\ln\ln n}{\ln n} = \dfrac{\ln X}{X}$ avec $X = \ln v_n$

Quand $n \to +\infty,\ v_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad X = \ln v_n \to +\infty$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\ln X}{X} \to 0$ (Croissance comparée) $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{\ln\ln n}{\ln n} \to 0$

De plus $\dfrac{\ln 2}{\ln n} \to 0$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} t_n = 1$

D'où, par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln v_n}{\ln n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln v_n \sim \ln n$

Or $v_n \sim n\ln v_n \quad \Rightarrow \quad v_n \sim n\ln n$