**Exercice 1** Soit $f : E \to F$ une application linéaire

1) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de $E$
Montrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$
2) Soit $E_1$ un sev de $E$
Montrer que $f(E_1)$ est un sev de $F$
3) Soit $F_1$ un sev de $F$
Montrer que $f^{-1}(F_1)$ est un sev de $E$

**Exercice 2** 3. op 577

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et de base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$
Soit $F$ un espace vectoriel de dimension 2 et de base $\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2)$
Soit $f$ l'application linéaire de $E$ dans $F$ telle que :

$$f(b_1) = b'_1 + 2b'_2 \quad f(b_2) = 3b'_1 - 4b'_2 \quad f(b_3) = 5b'_1 + 6b'_2$$

a) Soit $u_1$ un vecteur de coordonnées $(1, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{B}$. Calculer les cordonnées de $f(u_1)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

b) Plus généralement, soit $u$ un vecteur de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. Calculer les coordonnées $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$'.
Écrire cette relation sous la forme matricielle $Y = M.X$
Comparer $M$ avec les coordonnées de $f(b_1)$, $f(b_2)$ et $f(b_3)$ dans $\mathcal{B}'$.

$M$ est appelée la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

**Exercice 3** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, (x, y, z) \mapsto (x - z, 2x - 2y, 0, y - z)$

a) Montrer que $f$ est une aplication linéaire
b) Déterminer la matrice canonique de $f$
c) Déterminer des bases de $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$

**Exercice 4**

Soit $f$ une application linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ dont on donne la matrices dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$. Dans chacun des cas suivants :

1) Indiquer les valeurs de $n$ et $p$
Peut-on savoir si $f$ est injective, surjective, bijective ?
2) Trouver $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ ( base et dimension)
3) Indiquer si $f$ est injective, surjective, bijective

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5** $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ P \mapsto XP'(X) - P(X+1)$

a) Montrer que l'application $f$ est linéaire.
b) Donner la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

**Exercice 6**

Soit $E$ un espace vectoriel et $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$.
Montrer que : $f \circ g = 0 \iff \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$

**Exercice 7**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que

a) $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker} f \iff \mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$
b) $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g \iff \mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f = F$

**Exercice 8**

Soient $E$ un espace vectoriel et $f$ et $g$ deux endomorphismes de E tels que :
$fog = g \circ f$

a) Montrer alors que : $f(\mathrm{Ker} g) \subset \mathrm{Ker} g$
b) Montrer que : $f(\mathrm{Im} g) \subset \mathrm{Im} g$

**Exercice 9**

Soit $f : E \to F$ une a.l., $E_1$ et $E_2$ sev de $E$
Mq : $f(E_1) = f(E_2) \iff E_1 + \mathrm{Ker} f = E_2 + \mathrm{Ker} f$

**Exercice 10**

Pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on pose $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$.
Montrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. (Par récurrence sur $n$)