1) $\sin x < 1/2 \iff 5\pi/6 + 2k\pi < x < 13\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$(\iff -7\pi/6 + 2k\pi < x < \pi/6 + 2k\pi$

$\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]5\pi/6 + 2k\pi < x < 13\pi/6 + 2k\pi[\quad)$ (C 163a)

2) Les racines cubiques de l'unité sont : (C 323d)

$z_0 = 1, \quad z_1 = \mathrm{e}^{\mathbf{i}2\pi/3} = \frac{-1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \mathrm{e}^{\mathbf{i}4\pi/3} = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}2\pi/3} = \frac{-1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) La courbe (C) d'équation $y = \exp x$ (C 440b)
admet une tangente d'équation : $y = x + 1$ au point $(0;1)$

4) Suite récurrente linéaire ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (C 545b)

à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cas $\Delta = 0$ avec $\Delta = a^2 + 4b$:

Alors les solutions réelles sont de la forme :

$u_n = \underline{r_0^n(\lambda + \mu.n)}$ avec $\underline{\lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

et $\underline{r_0}$ racine(s) (double) de l'équation $r^2 = ar + b$

5) Donner un encadrement, le plus précis possible, de x en utilisant $\lfloor x \rfloor$

$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ (C 601b)

6) $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I,\ x \notin A_i$ (C 740e)

7) Soient $f : E \to F,\ g : F \to G$ deux applications (C 786a)
Montrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective

Supposons $g \circ f$ injective

Il faut montrer que $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y$ car $g \circ f$ est injective

Donc f est injective.

8) Vrai ou faux ? ...**Faux** (C 830c)

Si f et g admettent des limites finies en a,

Alors $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \Rightarrow f \underset{a}{\sim} g$

Pour que ce soit vrai, il faut que les limites soient finies non nulles
Contre exemple en $a = 0$: $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ en 0

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ et pourtant $f(x) \underset{x\to 0}{\not\sim} g(x)$

9) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 919a)

$a = \arccos \frac{3}{5} \iff \cos a = \frac{3}{5}$

L'implication est vraie, mais la réciproque fausse.
Pour avoir l'équivalence, il faudrait :

$a = \arccos \frac{3}{5} \iff (\cos a = \frac{3}{5}$ ET $a \in [0, \pi]$)

10) $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ (C 1014b)

$\iff$ La courbe C_f admet une tangente verticale en $(a,\ f(a))$

11) $\int^u \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \int^u \frac{(x^2 + 1) - 1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \int^u \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right)\mathrm{d}x$ (C 1079)

$= u - \arctan(u)$ sur $\mathbb{R}$

12) Déterminer les solutions de l'équation (C 1151e)

$xy' + 3.y = 0$ sur $]-\infty, 0[$

$(E) \iff y' + \frac{3}{x}.y = 0 \iff y' + a(x)y = 0$

avec $a(x) = \frac{3}{x}$ et $A(x) = 3\ln|x|$ une primitive de a

Les solution sont de la forme $y(x) = K\mathrm{e}^{-3\ln|x|} = K\frac{1}{|x|^3} = \frac{-K}{x^3}$
$K \in \mathbb{R}$

13) | Si une suite réelle u converge vers $\ell > 0$ (C 1229c)
Alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$ |

Démonstration : Posons $\varepsilon = \ell/2 > 0$ On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Donc il existe $p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \quad \Rightarrow \quad \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$

Avec $\ell - \varepsilon = \ell/2 \quad \Rightarrow \quad u_n \geq \ell/2 > 0$ pour $n \geq p$ CQFD

14) Donner les 4 premiers termes non nuls du DL suivant (C 1291)

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)\end{aligned}$$

15) Soit f décroissante sur $]a,\ b[$ avec $a < b$, $(a,\ b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ (C 1416b)

Si f <u>n'est pas minorée</u> sur $]a,\ b[$ alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$

16) **Propriété** : f est convexe sur I si (C 1492a)

si $\forall (x_1,\ x_2) \in I^2,\ \forall t \in [0,1]$,

$$f\Big(t.x_1 + (1-t).x_2\Big) \leq t.f(x_1) + (1-t).f(x_2).$$

17) | $f(x) = x \sin\dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ (C 1615b)
On admet que $\sin(1/x)$ et $\cos(1/x)$ ne convergent pas en 0 et que f est continue en 0. f est-elle dérivable en 0 ? **Démontrez-le** |

$\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\dfrac{1}{x}$ qui diverge quand $x \to 0$

Donc f n'est pas dérivable en 0

18) <u>Vocabulaire</u> : E un espace vectoriel et $(u_1, \dots,\ u_n) \in E^n$ (E 2702c)

$\mathrm{Vect}(u_1, \dots,\ u_n)$ est appelé le sev de E engendré par $(u_1, \dots,\ u_n)$

19) <u>Propriété caractéristique</u> : $(u_1, \dots,\ u_n)$ est une base de E (C 2721)

$\iff \forall k \in E,\quad \exists (a_1,\ a_2,\ \dots a_n) \in \mathbb{K}^n$ <u>unique</u> tel que

$k = a_1.u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$ (Ne pas oublier l'unicité)

20) | <u>Démonstration</u> Soient F et G deux sev de E (C 2753e)
Montrer que F et G sont en somme directe $\Rightarrow$ $F \cap G = \{\vec{0}\}$ |

(Rappelons que, par défintion, F et G sont en somme directe $\iff \forall u \in F + G,\ \exists (v, w) \in F \times G$ <u>unique</u> tel que $w = u + v$)

Supposons que F et G sont en somme directe (Mq $F \cap G = \{\vec{0}\}$)

- On a $\{\vec{0}\} \subset F \cap G$ car $F \cap G$ est un sev de E
- Soit $u \in F \cap G \quad \Rightarrow \quad u \in F$ et $u \in G$

  On a $u = u + \vec{0}$ avec $(u, \vec{0}) \in F \times G$

  et $u = \vec{0} + u$ avec $(\vec{0}, u) \in F \times G$

  Or $F \oplus G$. Donc, par unicité de la décompostion, on a

  $(u, \vec{0}) = (\vec{0}, u) \quad \Rightarrow \quad u = \vec{0}$

  On a donc bien $F \cap G \subset \{\vec{0}\}$

D'où $F \cap G = \{\vec{0}\}$

21) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (C 2771d)

Soient $\mathcal{B} = (b_1,\ b_2)$, $\mathcal{V} = (v_1,\ v_2)$ deux bases d'un ev E
et $v_1 = b_1 - 2b_2 \quad v_2 = 4b_1 + 2b_2$

Alors $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{V}$

| La matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{V}$ est $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ |

22) Vrai ou Faux ? ...**Faux** (E 2905b)

$f : E \to F$ une application, A un sous-ensemble de E et $x \in E$

Alors $f(x) \in f(A) \quad \Rightarrow \quad x \in A$

Il suffit de prendre une application tq $f(a) = f(b) = c$ et $A = \{a\}$

On a $f(A) = \{c\} \quad f(b) \in f(A)$ et $b \notin A$

Le mieux est de faire un dessin

23) Théorème du rang (Bien donner toutes les hypothèses) (C 2917)

Si $f : E \to F$ est une application linéaire et E de dimension finie

Alors $\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$

24) (Toutourien) Soit $f : E \to F$ est une application linéaire (C 2921c)

Si $\dim E = \dim F$ finie

Alors f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective

25) Soient $f : E \to F$ une application linéaire injective (E 2945) et $(u_1, \ \dots, u_p)$ une famille libre de E

Démontrer que $(f(u_1), \dots f(u_p))$ est une famille libre de F

Soit $(a_1, \dots a_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $a_1 f(u_1) + \cdots + a_p f(u_p) = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad f(a_1.u_1 + \cdots + a_p.u_p) = \vec{0}$ car f est linéaire

$\Rightarrow \quad a_1.u_1 + \cdots + a_p.u_p \in \mathrm{Ker} f$

Or f injective $\Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\} \Rightarrow a_1.u_1 + \cdots + a_p.u_p = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad (a_1, \dots, \ a_p) = (0, \dots, 0)$ car $(u_1, \ \dots u_p)$ est libre

Donc $(f(u_1), \dots f(u_p))$ est libre

26) P peut s'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (C 3101b)

$\iff \quad P$ est de degré au plus n

27) Caractérisation par les dérivées (C 456b)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$: $\deg P \leq k \iff P^{(k+1)} = 0$

28) Soit $P = \alpha \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$ Alors $\mathrm{d}^\circ P = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i$ (C 3135)

29) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$ $\quad \overline{P(z)} = \overline{P}(\ \bar{z}\ )$ (C 3148a)

30) Polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$: (C 3151)

$(X - a)$ avec $a \in \mathbb{C}$