

1) Pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z - \bar{z} = 2i \cdot \text{Im}(z)$  (C 210d)

2) Dans  $\mathbb{C}$  : Soit  $r > 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  (C 321b)  
 $z^n = re^{i\theta} \iff z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$  avec  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$   
 (ou avec  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  )

3)  $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\sum_{j=1}^p b_j\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p a_k b_j$  (C 082b)

4) Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$  (C 565b)  
 $\forall x \in \mathbb{R}, x \in [a-r, a+r] \iff |x-a| \leq r$

$x \in [a-r, a+r] \iff a-r \leq x \leq a+r \iff -r \leq x-a \leq +r$   
 $\iff |x-a| \leq r$

5) Démonstration de :  $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y \geq x$  (C 715b)  
 Prenons  $x = 0 \quad x \in \mathbb{N}$   
 Soit  $y \in \mathbb{N}$  On a bien  $x \leq y$  CQFD

6) Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions (C 768c)  
 $x \in D_{f \circ g} \iff (f \circ g)(x)$  existe  $\iff x \in D_g$  ET  $g(x) \in D_f$

7) Soient  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$  deux applications (C 786a)  
 Montrer que  $g \circ f$  injective  $\Rightarrow f$  injective

Supposons  $g \circ f$  injective

Il faut montrer que  $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Soit  $(x, y) \in E^2$  tel que  $f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y))$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y$  car  $g \circ f$  est injective

Donc  $f$  est injective.

8) Vrai ou faux? ... **Vrai** (C 830b)

Si  $f$  et  $g$  admettent des limites en  $a$ ,

Alors  $f \sim_a g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

C'est la réciproque qui est fausse

9) Pour  $a \in [-1, +1]$ ,  $\arccos a = \frac{\pi}{5} \iff a = \cos \frac{\pi}{5}$  (C 920d)

10) Pour  $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1 \int u'u^\alpha = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$  (C 1051a)

11) **formule de changement de variable pour les intégrales** (C1112b)

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \cdot du$$

avec  $a, b$  dans un intervalle  $I$ ,  $\varphi$  de classe  $C^1$  sur  $I$   
 et  $f$  continue sur  $\varphi(I)$

12) Soit  $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$  (C 1132b)

Montrer que la suite  $(I_n)$  est monotone

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (t^{n+1} - t^n) e^{-t} dt = \int_0^1 (t-1)t^n e^{-t} dt$$

Pour  $t \in [0, 1], (t-1)t^n e^{-t} \leq 0$  et  $0 \leq 1$  (BBS)

Donc  $I_{n+1} - I_n \leq 0$  La suite  $(I_n)$  est décroissante.

13) La proposition suivante est **FAUSSE** (C 1222c)

$$[\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq A] \Rightarrow [\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty]$$

Contre exemple :  $u_n = n \cdot (-1)^n$

Pour  $n$  pair,  $u_n = n$  donc  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq A$  est vrai.  
 Par contre, pour  $n$  impair  $u_n < 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  est faux

14) Formule de Taylor-Young en  $a$  à l'ordre  $n$  : (C 1297a)

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^n$  sur un intervalle  $I$  contenant  $a$

Alors  $\forall h \in \mathbb{R}$  tel que  $a + h \in I$ , on a :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + o(h^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$$

15) **Théorème des valeurs intermédiaires** (C 1420c)

Dans le cas où  $f$  est une fonction réelle continue sur un intervalle  $I$

avec  $a, b \in I$  tels que  $a < b$  et  $f(a) > f(b)$  :

Alors, pour tout  $y_0 \in [f(b), f(a)]$

il existe au moins un  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $y_0 = f(x_0)$

16) **Égalité des accroissements finis** (C 1601)

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

17) **En utilisant l'inégalité des accroissements finis** (C 1603b)

Montrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $\frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

Pour  $x \geq 0$ , posons  $\forall t \in [0, x]$ ,  $f(t) = \ln(1+t)$ ,

Sur  $[0, x]$   $f$  est continue et dérivable et  $f'(t) = \frac{1}{1+t}$

Pour  $0 \leq t \leq x$ ,  $0 < 1 \leq 1+t \leq 1+x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < f'(t) \leq 1, \forall t \in [1, x]$

Donc  $\frac{1}{1+x} < \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$  car  $x > 0$

18) Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  (C 2641b)

$$\dim \mathcal{S} = 3 + 2 + 1 = 6$$

19) **Théorème de la dimension** (pour un ev  $E$ ) (C 2724a)

Toutes les bases de  $E$  ont le même nombre de vecteurs

et ce nombre est appelé la dimension de  $E$

20) **Démonstration** Soient  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$  (C 2753e)

Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe  $\Leftrightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$

( Rappelons que, par définition,  $F$  et  $G$  sont en somme directe  $\Leftrightarrow \forall u \in F + G, \exists (v, w) \in F \times G$  unique tel que  $w = u + v$ )

Supposons que  $F$  et  $G$  sont en somme directe ( Mq  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ )

• On a  $\{\vec{0}\} \subset F \cap G$  car  $F \cap G$  est un sev de  $E$

• Soit  $u \in F \cap G \Rightarrow u \in F$  et  $u \in G$

On a  $u = u + \vec{0}$  avec  $(u, \vec{0}) \in F \times G$

et  $u = \vec{0} + u$  avec  $(\vec{0}, u) \in F \times G$

Or  $F \oplus G$ . Donc, par unicité de la décomposition, on a

$$(u, \vec{0}) = (\vec{0}, u) \Rightarrow u = \vec{0}$$

On a donc bien  $F \cap G \subset \{\vec{0}\}$

D'où  $F \cap G = \{\vec{0}\}$

21) Soient  $F$ , de base  $\mathcal{U}$ , et  $G$ , de base  $\mathcal{V}$ , deux sev de  $E$  (C 2757a)

$F + G = E \Leftrightarrow (\mathcal{U}, \mathcal{V})$  engendre  $E$  (ou est une famille génératrice de  $E$ )

22) Vrai ou Faux? ... **Vrai** (C 2775c)

Soient  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  deux bases de  $E$ ,  $P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$   $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Soit  $k \in E$  de coordonnées  $(1, 1)$  dans la base  $\mathcal{B}$

Alors  $k$  a pour coordonnées  $(4, 7)$  dans la base  $\mathcal{C}$

$$\text{En effet } X_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}} X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

23) (Propriété) Soit  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire (C 2911a)

$f$  surjective  $\Leftrightarrow \text{Im} f = F$

24) Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  (C 2920b)

$$f(\mathcal{B}) \text{ libre} \iff f \text{ est } \underline{\text{injective}}$$

25) Vocabulaire :  $f$  est un automorphisme de  $E$  (C 2926b)

ssi  $f$  est une a.l. linéaire bijective de  $E$  dans  $E$

26) Soient  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$  et  $n \in \mathbb{N}$  (C 3100b)

$$d^\circ P \leq n \iff \forall k \in \mathbb{N}, k \geq n+1 \Rightarrow a_k = 0$$

27)  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \Rightarrow P' = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k$  avec  $\underline{c_k = (k+1)a_{k+1}}$  (C 3120)

28) Vrai ou Faux? . . . **Faux** (C 3133d)

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $a \in \mathbb{K}$ ,

$$P(a) = P'(a) = 0 \Rightarrow a \text{ est une racine double de } P$$

$a$  peut être racine de multiplicité **plus grande ou égale** que 2

29) **Propriété** : Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  (C 3147b)

$$P \in \mathbb{R}[X] \iff P = \overline{P}$$

30) Décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  (C 3152)

$$X^2 - 2 \cos \alpha X + 1 = (X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha})$$