

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $3 < x^2 \leq 16$  (C 075c)

$$\iff \sqrt{3} < |x| \leq 4$$

$$\iff -4 \leq x < -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \sqrt{3} < x \leq 4$$

$$\iff x \in [-4, -\sqrt{3}[ \cup ]\sqrt{3}, 4]$$

2)  $1 - e^{-ib} = e^{-ib/2} (e^{ib/2} - e^{-ib/2}) = 2i e^{-ib/2} \sin(b/2)$  (C 248d)

3) Soit  $f(x) = x^x$  : Domaine de déf et dérivée ? (C 415)

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x} \text{ pour } x \in ]0, +\infty[$$

$$f'(x) = (x \ln x)' e^{x \ln x} = (\ln x + 1)x^x$$

4) Changements d'indices :  $j = k - 1$  (C 530b)

$$\Rightarrow k = j + 1 \Rightarrow 2k + 1 = 2j + 3 \quad \begin{cases} k = n & j = n - 1 \\ k = 1 & j = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n (2k + 1)u_{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (2j + 3)u_j$$

5) Donner un encadrement décimal de  $x \in \mathbb{R}$  à  $10^{-n}$  près : (C 605b)

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Par exemple pour  $x = \pi$  et  $n = 2$   $10^2 \pi = 314,15\dots$

$$\Rightarrow \lfloor 10^n x \rfloor = 314 \Rightarrow \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = 3,14 \Rightarrow 3,14 \leq \pi < 3,15$$

6) Définition :  $f : E \rightarrow F$  est une application si et seulement si (C 750)

tout élément de  $E$  a une unique image dans  $F$

7) Équivalent avec  $x \rightarrow 1$  de  $\sqrt{x}$  (C 805d)

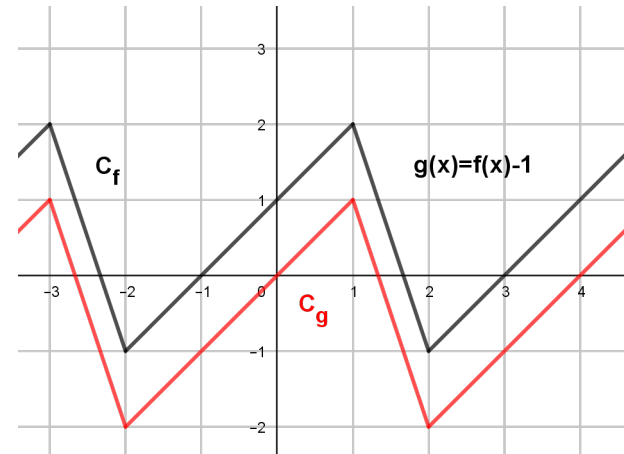
$$\sqrt{x} - 1 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2}(x - 1)$$

8) Vrai ou Faux ? ... **Faux** (C 845b)

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

On ne pas soustraire dans un équivalent

9) On a tracé une partie du graphe de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Tracer le graphe de  $g$  définie par  $g(x) = f(x) - 1$  (C 1005a)



$$10) \int_1^4 \sqrt{x} \, dx = \left[ \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 = \frac{2}{3} [x\sqrt{x}]_1^4 = \frac{2}{3} [4\sqrt{4} - 1\sqrt{1}] = \frac{14}{3} \quad (C 1054b)$$

$$11) f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} \, dt \text{ pour } x \in \mathbb{R} \quad (C 1131a)$$

Déterminer le signe de  $f$  (Justifier !)

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $g(t) = e^{-t^2} > 0$

• Pour  $x \geq 0$ ,  $x \leq 2x \Rightarrow f(x) = \int_x^{2x} g(t) \, dt \geq 0$   
(Bornes dans le bon sens)

• Pour  $x \leq 0$ ,  $x \geq 2x \Rightarrow f(x) = \int_x^{2x} g(t) \, dt \leq 0$

- 12) Définition : la suite  $(u_n)$  est convergente (C 1221a)  
si et seulement si (en français)  $(u_n)$  admet une limite **finie** en  $+\infty$
- 13)  $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$  (C 1289)
- 14) Soit  $f$  décroissante sur  $]a, b[$  avec  $a < b$ ,  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}^2}$  (C 1415b)  
Si  $f$  est majorée par  $M$   
alors  $f$  admet une limite finie en  $a$   
tel que  $\forall x \in ]a, b[, f(x) \leq \lim_a f \leq M$
- 15) **Propriété** :  $f$  est convexe sur  $I$  si (C 1492a)  
si  $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall t \in [0, 1]$ ,  
 $f(t.x_1 + (1-t).x_2) \leq t.f(x_1) + (1-t).f(x_2)$ .
- 16) Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n)}(\mathbb{K})$ , (C 2602b)  
 $\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$   
 $\Leftrightarrow A$  est triangulaire inférieure
- 17) Définition :  $(u_1, \dots, u_n)$  est une famille liée de  $E$  (C 2710b)  
 $\Leftrightarrow \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$  tq  $\sum_{k=1}^n a_k.u_k = \vec{0}$  et  $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$
- 18) Soient  $F, G, H$  trois sev de  $E$  (C 2751c)  
 $F + G \subset H \Leftrightarrow (F \subset H \text{ et } G \subset H)$
- 19)  $\mathcal{B} = (b_1, b_2), \mathcal{U} = (u_1, u_2)$  deux bases d'un ev  $E$  (C 642b)  
et  $u_1 = b_1 + 3b_2$   $u_2 = 4b_1 + 2b_2$  Une matrice s'écrit sans calcul.  
 $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{U}$
- 20) Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $M$  une matrice de  $f$  (dans des bases données).  
Alors  $f$  bijective  $\Leftrightarrow M$  est inversible (C 2865a)
- 21) (Propriété) Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire (C 2912c)  
et  $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$  une base (ou une famille génératrice) de  $E$   
Alors  $\text{Im} f = \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n))$
- 22) Vocabulaire :  $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  (C 2925b)  
ssi  $f$  est une application linéaire bijective de  $E$  dans  $F$
- 23) Soit  $E = F \oplus G$  . (C 2952a)  
et  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .  
Soit  $u = v + w$  avec  $(v, w) \in F \times G$  alors  $p(u) = v$
- 24) Soient  $E = F \oplus G$ . (C 2961a)  
et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$   
Alors  $u \in F \Leftrightarrow \underline{s(u) = u}$
- 25) Propriété : Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  (C 3025)  
Alors  $\text{rg}(f \circ g) \leq \underline{\min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))}$   
et  $\text{rg}(f \circ g) \leq \underline{\min(\dim E, \dim F, \dim G)}$
- 26) Soit  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$  un polynôme de degré  $q$  (C 3104a)  
Alors le coefficient dominant de  $P$  est  $a_q$
- 27) propriété caractéristique : Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $a \in \mathbb{K}$  (C 3133a)  
 $a$  est une racine de  $P$  de multiplicité  $k$   
 $\Leftrightarrow P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$  et  $P^{(k)}(a) \neq 0$

28) Déterminer  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que (C 3152b)

$$P = (X - 1)(X + 1) \text{ divise } Q = X^8 + 2X^7 + aX^5 + b$$

$$P = (X - 1)(X + 1) \text{ divise } Q \iff Q(1) = Q(-1) = 0$$

$$\iff P(1) = 3 + a + b = 0 \text{ et } P(-1) = -1 - a + b = 0$$

$$\iff \begin{cases} a + b = -3 \\ -a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{matrix} L_1 + L_2 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2b = -2 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} 2b = -2 \\ -2a = 4 \end{cases} \iff (a, b) = (-2, -1)$$

29) Vrai ou Faux ... **Vrai** (C 3169b)

Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $z \in \mathbb{C}$  alors  $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

$$P \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \text{ avec } a_k \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{a_k} = a_k$$

$$\Rightarrow \overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a_k} (\bar{z})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (\bar{z})^k = P(\bar{z})$$

30) Décomposition en facteurs irréductibles (C 3173d)

dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$  de  $P = X^4 - 1$

$$X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$$

$$\Rightarrow P = (X - 1)(X + 1)(X - \mathbf{i})(X + \mathbf{i}) \text{ dans } \mathbb{C}[X]$$

$$\text{et } P = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1) \text{ dans } \mathbb{R}[X]$$