

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 : Application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels
 Soit une application $f : E \rightarrow F$
 f est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \forall(a, b) \in \mathbb{K}^2, \\ f(a.\vec{u} + b.\vec{v}) = a.f(\vec{u}) + b.f(\vec{v})$$

Propriété 1 : propriétés élémentaires

Soit $f : E \rightarrow F$ est linéaire

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$
- $f(u + v) = f(u) + f(v)$
- $f(a.u) = a.f(u)$
- $f\left(\sum_{k=1}^n a_k u_k\right) = \sum_{k=1}^n a_k f(u_k)$

Démonstration En effet : $0_E = 0_E + 0_E$
 Donc : $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$
 $\Rightarrow f(0_E) = 2f(0_E) \Rightarrow f(0_E) = 0_F$

fin demo

1.1 Exemples

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (2x - y, x - 4z)$
 f est une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2
- $\varphi : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}), f \mapsto f'$
 car $\varphi(a.f + b.g) = (a.f + b.g)' = a.f' + b.g' = a\varphi(f) + b\varphi(g)$
- $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P \mapsto P(X + 1)$
- $\varphi : C^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f(t) dt$
- $\varphi : C^0(\mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R}), f \mapsto \varphi(f)$ telle que :
 $\forall x \in \mathbb{R}, [\varphi(f)](x) = \int_a^x f(t) dt$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto Y = A.X = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 4z \\ x - y + 5z \end{pmatrix}$$

f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 canoniquement associée à A

1.2 Applications particulières

Définition 2 : Application identité

Soit E un espace vectoriel
 L'application identité de E est une application linéaire de E dans E
 On la note $\text{Id}_E : \text{Id}_E : E \rightarrow E, \vec{u} \mapsto \text{Id}_E(\vec{u}) = \vec{u}$

Définition 3 : Application nulle

Soient E et F deux espaces vectoriels
 L'application nulle $\vec{0}$ de E dans F définie par :
 $\forall u \in E, \vec{0}(u) = \vec{0}_F$
 est une application linéaire.

Remarque : Souvent, l'application nulle est notée simplement 0 quand cela ne prête pas à confusion)

Définition 4 : a.l. canoniquement associée à une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}(n, p)(\mathbb{K})$
 Alors l'application $f : \mathcal{M}(p, 1) \rightarrow \mathcal{M}(n, 1), X \mapsto f(X) = A.X$
 est une application linéaire, appelée l'**application linéaire canoniquement associée à A**

Remarque On remplace couramment $\mathcal{M}(p, 1)$ et $\mathcal{M}(n, 1)$ par \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n .

On notera ainsi : $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n, X \mapsto f(X) = A.X$

1.3 Propriétés

Propriété 2 : CL d'applications linéaires

Soient f et g deux applications linéaires $E \rightarrow F$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
 Alors $\alpha.f + \beta.g : E \rightarrow F$ est une application linéaire

Démonstration

Posons $h = \alpha.f + \beta.g$.

Montrons que h est une application linéaire.

Soient $(u, v) \in E^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 h(a.u + b.v) &= (\alpha.f + \beta.g)(a.u + b.v) \\
 &= \alpha.f(a.u + b.v) + \beta.g(a.u + b.v) \\
 &\quad \text{car par définition } (\alpha.f + \beta.g)(x) = \alpha.f(x) + \beta.g(x) \\
 &= \alpha(a.f(u) + b.f(v)) + \beta(a.g(u) + b.g(v)) \\
 &\quad \text{car } f \text{ et } g \text{ sont linéaires} \\
 &= a(\alpha.f(u) + \beta.g(u)) + b(\alpha.f(u) + \beta.g(v)) \\
 &= a(\alpha.f + \beta.g)(u) + b(\alpha.f + \beta.g)(v) \\
 &= a.h(u) + b.h(v)
 \end{aligned}$$

h est donc bien une application linéaire

fin demo

Propriété 3 : Conséquence : $\mathcal{L}(E, F)$

- || L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel, qui est noté $\mathcal{L}(E, F)$
- || Le vecteur nul de $\mathcal{L}(E, F)$ est l'application nulle

Propriété 4 : composée de deux applications linéaires

- || Soient E, F et G trois espaces vectoriels.
- || Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires.
- || Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .

Démonstration

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $(u, v) \in E^2$

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(a.u + b.v) &= g[f(a.u + b.v)] \\
 &= g[a.f(u) + b.f(v)] \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\
 &= a.g[f(u)] + b.g[f(v)] \quad \text{car } g \text{ est linéaire} \\
 &= a.(g \circ f)(u) + b.(g \circ f)(v)
 \end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est bien une application linéaire

fin demo

Propriété 5 : composée de deux applications linéaires

- || Soient E, F et G trois espaces vectoriels, $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $f, f_1, f_2 : E \rightarrow F$ et $g, g_1, g_2 : F \rightarrow G$ des applications linéaires, Alors
- $(a.g_1 + b.g_2) \circ f = a.(g_1 \circ f) + b.(g_2 \circ f)$ (Propriété déjà connue)
- $g \circ (a.f_1 + b.f_2) = a.(g \circ f_1) + b.(g \circ f_2)$ (Ça, c'est nouveau)

Démonstration

Il faut montrer que $(a.g_1 + b.g_2) \circ f = a.(g_1 \circ f) + b.(g_2 \circ f)$ et $g \circ (a.f_1 + b.f_2) = a.(g \circ f_1) + b.(g \circ f_2)$ (Égalité d'applications)

Donc il faut montrer qu'elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée (ce qui est bien le cas ici)

et que $\forall u \in E, [(a.g_1 + b.g_2) \circ f](u) = [a.(g_1 \circ f) + b.(g_2 \circ f)](u)$ (Faire bien attention à l'ordre et la position des parenthèses et des crochets. Il ne faut pas faire et écrire n'importe quoi)

et de même pour l'autre égalité.

C'est parti!

Soit $u \in E$

- $[(a.g_1 + b.g_2) \circ f](u)$
- $= (a.g_1 + b.g_2)[f(u)]$ définition de $g \circ f : (g \circ f)(x) = g(f(x))$
- $= a.g_1(f(u)) + b.g_2(f(u))$ déf. de somme et produit de fonctions : $(a.f + b.g)(x) = a.f(x) + b.g(x)$
- $= a.(g_1 \circ f)(u) + b.(g_2 \circ f)(u)$ définition de $g \circ f$
- $= [a.(g_1 \circ f) + b.(g_2 \circ f)](u)$ somme et produit de fonctions

CQFD

Remarquer qu'on n'a pas utilisé la linéarité de f et g : donc cette propriété est valable pour toutes les fonctions

- $[g \circ (a.f_1 + b.f_2)](u)$
- $= g[(a.f_1 + b.f_2)(u)]$ définition de $g \circ f$
- $= g[a.f_1(u) + b.f_2(u)]$ somme et produit de fonctions
- $= a.[g(f_1(u))] + b.[g(f_2(u))]$ car g est linéaire
- $= a.(g \circ f_1)(u) + b.(g \circ f_2)(u)$ composée de fonctions
- $= [a.(g \circ f_1) + b.(g \circ f_2)](u)$ somme et produit de fonctions

CQFD.

Dans cette démonstration, on a utilisé la linéarité (de g). Donc cette propriété n'est pas toujours vraie.

fin demo

Définition 5 : Endomorphisme

Endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E
 La composée de deux endomorphismes de E est encore un endomorphisme de E
 L'ensemble des endomorphismes de E et noté $\mathcal{L}(E)$

2 Bijection & Co**2.1 Image et image réciproque**

Soit $f : E \rightarrow F$ une application

Définition 6 : Image d'un ensemble (Rappel)

Soit $A \subset E$.

$$f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, y = f(x)\}$$

$$= \{f(x), x \in A\}$$

On a donc : $y \in f(A) \iff [\exists x \in A, y = f(x)]$

Définition 7 : Image réciproque d'un ensemble (Rappel)

Soit $B \subset F$, $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

On a donc : $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$

Propriété 6 : Images et images réciproques de sev

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire
 Soient E' et F' des sous-espaces respectifs de E et F
 Alors $f(E')$ est un sev de F
 et $f^{-1}(F')$ est un sev de E

Démonstration

a) Mq $f(E')$ est un sev de F

- $E' \subset E \Rightarrow f(E') \subset F$
- Mq $0_F \in f(E')$
 En effet, $0_E \in E'$ car E' est un sev de E
 $\Rightarrow f(0_E) \in f(E')$
 Or $f(0_E) = 0_F$, donc $0_F \in f(E')$

• Stabilité par CL de $f(E')$

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $(u', v') \in [f(E')]^2$

Montrons $au' + bv' \in f(E')$

$u' \in f(E')$ donc il existe $u \in E'$ tel que $u' = f(u)$

De même $v' \in f(E') \Rightarrow \exists v \in E', v' = f(v)$

Donc

$$a.u' + b.v' = a.f(u) + b.f(v) = f(a.u + b.v) \quad \text{car } f \text{ est linéaire}$$

Or $(u, v) \in E'^2$

$\Rightarrow a.u + b.v \in E'$ car E' sev donc stable par CL

$\Rightarrow f(a.u + b.v) \in f(E')$

Donc : $a.u' + b.v' \in f(E')$ CQFD

CQFD

b) $f^{-1}(F')$ est un sev de E

• $f^{-1}(F') \subset E$ car $f : E \rightarrow F$

• $f(0_E) = 0_F$ et $0_F \in F'$ car F' sev de F
 Donc $f(0_E) \in F' \iff 0_E \in f^{-1}(F')$

• Stabilité par CL de $f^{-1}(F')$

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(u, v) \in [f^{-1}(F')]^2$

Montrons que $a.u + b.v \in f^{-1}(F')$

c'est-à-dire $f(a.u + b.v) \in F'$

$$f(a.u + b.v) = a.f(u) + b.f(v) \quad \text{car } f \text{ est linéaire}$$

Or $u \in f^{-1}(F') \Rightarrow f(u) \in F'$

et $v \in f^{-1}(F') \Rightarrow f(v) \in F'$

Donc $a.f(u) + b.f(v) \in F'$ car F' stable par CL

$\Rightarrow f(a.u + b.v) \in F'$

$\Rightarrow a.u + b.v \in f^{-1}(F')$ CQFD

fin demo

2.2 Noyau et image**Définition 8 : Noyau d'une application**

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

On appelle noyau de f l'ensemble

$$\text{Ker } f = f^{-1}(\{0_F\})$$

$$= \{u \in E / f(u) = 0_F\}$$

Autrement dit

$$\forall u \in E, u \in \text{Ker } f \iff f(u) = 0_F$$

Définition 9 : Image d'une application

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire
On appelle image de f l'ensemble

$$\begin{aligned} \text{Im}f &= f(E) \\ &= \{v \in F / \exists u \in E, v = f(u)\} \\ &= \{f(u) / u \in E\} \end{aligned}$$

ou encore $\forall v \in F, v \in \text{Im}f \iff \exists u \in E, v = f(u)$

Propriété 7 : Noyau et image

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.
Alors $\text{Ker}f$ est un sev de E
et $\text{Im}f$ est un sev de F

Découle de la section précédente

2.3 Exemples

Exemple 1 : $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (0, x, y)$

- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
 $u \in \text{Ker}f \iff f(u) = 0 \iff (0, x, y) = (0, 0, 0)$
 $\iff x = y = 0$
 $\iff u = (0, 0, z) = z \cdot (0, 0, 1) = z \cdot e_3$

$\text{Ker}f = \text{Vect}(e_3)$

- $\text{Im}f = f(\mathbb{R}^3) = \{f(u), u \in \mathbb{R}^3\}$
 $= \{(0, x, y), / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
 $= \{x \cdot e_2 + y \cdot e_3, / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
 $= \text{Vect}(e_2, e_3)$

Exemple 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z) \mapsto (2x - y - z, x + 3y - 4z, 2x - 2z, -3x + 2y + z)$
Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}f$ et de $\text{Im}f$

• Détermination de $\text{Ker}f$

Soit $u \in \mathbb{R}^3. u = (x, y, z).$

$u \in \text{Ker}f \iff f(u) = 0_F \iff f(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$

$$\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ -3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{matrix} L_1 - L_3 \\ 2L_2 - L_3 \\ L_3 \\ 2L_4 + 3L_3 \end{matrix} \begin{cases} -y + z = 0 \\ 6y - 6z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$\iff u = (x, y, z) = (z, z, z) = z(1, 1, 1) = z u_0$

$\Rightarrow u \in \text{Vect}(u_0)$

Donc $\text{Ker}f \subset \text{Vect}(u_0)$ avec $u_0 = (1, 1, 1)$

De plus $f(u_0) = f(1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$

$\Rightarrow u_0 \in \text{Ker}f \Rightarrow \text{Vect}(u_0) \subset \text{Ker}f$

Donc $\text{Ker}f = \text{Vect}(u_0)$

$u_0 \neq 0$, donc (u_0) est libre.

Donc (u_0) est une base de $\text{Ker}f$.

$\text{Ker}f$ est donc de dimension 1

• Détermination de $\text{Im}f$

§ $\text{Im}f = \{f(u) / u = (x, y, z, t)\}$

$v \in \text{Im}f$

$\iff \exists u = (x, y, z) \text{ tel que } v = f(u)$

$\iff v = (2x - y - z, x + 3y - 4z, 2x - 2z, -3x + 2y + z)$
 $= x(2, 1, 2, -3) + y(-1, 3, 0, 2) + z(-1, -4, -2, 1)$
 $= x \cdot u_1 + y \cdot v_1 + z \cdot w_1$

$\iff v \in \text{Vect}(u_1, v_1, w_1)$

Donc $\text{Im}f = \text{Vect}(u_1, v_1, w_1)$

avec $u_1 = (2, 1, 2, -3), v_1 = (-1, 3, 0, 2), w_1 = (-1, -4, -2, 1)$

§ (u_1, v_1, w_1) est-elle une base de $\text{Im}f$?

Il faut voir si la famille (u_1, v_1, w_1) est libre

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$

$x \cdot u_1 + y \cdot v_1 + z \cdot w_1 = 0$

$\iff f(x, y, z) = 0$

$\iff (x, y, z) \in \text{Ker}f \iff x = y = z$

Par exemple $(1, 1, 1)$ est solution.

Donc la famille (u_1, v_1, w_1) est liée

§ On a en particulier

$1 \cdot u_1 + 1 \cdot v_1 + 1 \cdot w_1 = 0$

$$\Rightarrow w_1 = -u_1 - v_1$$

$$\Rightarrow \text{Im}f = \text{Vect}(u_1, v_1, w_1) = \text{Vect}(u_1, v_1)$$

§ (u_1, v_1) libre ?

$$\text{Soit } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x.u_1 + y.v_1 = 0$$

$$\iff x.u_1 + y.v_1 + z.w_1 = 0 \text{ et } z = 0$$

$$\iff x = y = z \text{ et } z = 0$$

$$\iff x = y = 0$$

Donc (u_1, v_1) est libre

§ (u_1, v_1) base de $\text{Im}f \Rightarrow \dim \text{Im}f = 2$

Remarque 1 :

Les calculs pour trouver une base de $\text{Im}f$ sont assez laborieux. Heureusement, nous allons avoir un certain nombre de propriétés qui vont nous simplifier la vie

Remarque 2 :

On a $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\text{et } \dim \text{Ker}f + \dim \text{Im}f = \dim E \quad (= \dim \mathbb{R}^3)$$

C'est une propriété qui restera tout le temps valable (théorème du rang)

Propriété 8

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } f : E \rightarrow F \text{ une application linéaire} \\ \bullet f \text{ est injective} \iff \text{Ker}f = \{0_E\} \\ \bullet f \text{ est surjective} \iff \text{Im}f = F \end{array} \right.$$

Démonstration

$$\text{a) } \underline{f \text{ est injective} \iff \text{Ker}f = \{0_E\}}$$

\Rightarrow Supposons f injective.

$$\{0_E\} \subset \text{Ker}f \quad (\text{C'est toujours vrai car } f(0_E) = 0_F)$$

$$\text{Montrons } \text{Ker}f \subset \{0_E\}$$

Soit $u \in \text{Ker}f$

$$\Rightarrow f(u) = 0 \quad \text{Or } f(0_E) = 0_F$$

$$\Rightarrow f(u) = f(0_E)$$

$$\Rightarrow u = 0_E \quad \text{car } f \text{ est injective}$$

$$\text{D'où } \text{Ker}f \subset \{0_E\}$$

$$\text{Conclusion : } \text{Ker}f = \{0_E\}$$

\Rightarrow Supposons $\text{Ker}f = \{0_E\}$

$$\text{Soit } (u, v) \in E^2 \text{ tel que } f(u) = f(v)$$

Or f est linéaire

$$\Rightarrow f(u - v) = f(u) - f(v) = 0_F$$

$$\Rightarrow u - v \in \text{Ker}f \quad \text{or } \text{Ker}f = \{0_E\}$$

$$\Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v$$

Conclusion : f est donc injective

b) f est surjective $\iff \text{Im}f = F$ Immédiat car, par équivalences :-

$$\text{Im}f = F$$

$$\iff f(E) = F$$

$$\iff \text{tout élément de } F \text{ appartient à } f(E)$$

$$\iff \text{tout élément de } F \text{ est l'image d'un élément de } E$$

$$\iff \text{tout élément de } F \text{ a un antécédent (au moins) dans } E$$

$$\iff f \text{ est surjective}$$

fin demo

3 Bijection et réciproque

3.1 Rappels

Définition 10 : bijection réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective.

L'application réciproque de f est l'application $f^{-1} : F \rightarrow E$ qui à tout élément de F associe son antécédent par f dans E .

Cette application est bijective.

Propriété 9

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective et $f^{-1} : F \rightarrow E$ sa réciproque.

On a alors :

$$\boxed{\forall x \in E, \forall y \in F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)}$$

Et de plus :

$$\boxed{f \circ f^{-1} = \text{Id}_F \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_E}$$

Démonstration

- $\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$
Cela découle immédiatement de la définition.
- $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$
On a $f : E \rightarrow F$ et $f^{-1} : F \rightarrow E$
Donc $f \circ f^{-1} : F \rightarrow F$ et $f^{-1} \circ f : E \rightarrow E$
- Soit $y \in F$, Posons $x = f^{-1}(y)$
On a donc $y = f(x)$
D'où $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = \text{Id}_F(y)$
Donc $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$
- Soit $x \in E$, posons $y = f(x)$
On a donc $x = f^{-1}(y)$ car f est bijective
D'où $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = \text{Id}_E(x)$
Donc $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$

*fin demo***Propriété 10 : Propriété caractéristique de la réciproque**

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications
 Si $f \circ g = \text{Id}_F$ **ET** $g \circ f = \text{Id}_E$
 Alors f et g sont bijectives et f et g sont réciproques l'une de l'autre
 (C'est-à-dire : $f = g^{-1}$ et $g = f^{-1}$)

Remarque :

Il faut avoir les deux égalités :

$$f \circ g = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \text{Id}_E.$$

Une seule ne suffit pas.

Exemple :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1 \quad g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ et pourtant ni f ni g ne sont bijectives.

Démonstration

Supposons $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$

Montrons que f est bijective

- Mq f injective
Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$
 $\Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$
 $\Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$
 $\Rightarrow \text{Id}_E(x) = \text{Id}_E(x')$
 $\Rightarrow x = x'$
 f est bien injective
- Mq f est surjective
Soit $y \in E$ On a $y = \text{Id}_F(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$
 $\Rightarrow y = f(x)$ en posant $x = g(y) \in E$
 Donc f est bien surjective
- Conclusion : f est bijective
- f est bijective donc f admet une réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ qui est bijective
Or $\text{Id}_F = f \circ g$
 $\Rightarrow f^{-1} \circ \text{Id}_F = f^{-1} \circ (f \circ g)$
 $\Rightarrow f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ g = \text{Id}_E \circ g = g$
 Donc g est également bijective et $g = f^{-1}$
 Donc on a également $g^{-1} = f$

*fin demo***Propriété 11 : Réciproque de la composée**

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications bijectives.
 Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

f et g sont bijectives donc : $f^{-1} : F \rightarrow E$ et $g^{-1} : G \rightarrow F$ existent.

Posons $h = f^{-1} \circ g^{-1} : G \rightarrow E$

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ h &= (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ (\text{Id}_F) \circ g^{-1} = (g \circ \text{Id}_F) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_G. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ (\text{Id}_F) \circ f = f^{-1} \circ (\text{Id}_F \circ f) = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \end{aligned}$$

D'où $(g \circ f) \circ h = \text{Id}_G$ et $h \circ (g \circ f) = \text{Id}_E$.

Donc, d'après la propriété précédente,

$g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = h = f^{-1} \circ g^{-1}$

fin demo

3.2 Isomorphismes

Définition 11 : Vocabulaire

- Isomorphisme c'est une application linéaire bijective
- Automorphisme c'est un endomorphisme bijectif.

automorphisme = endomorphisme bijectif = isomorphisme de E dans E

Propriété 12 : isomorphisme réciproque

- Soit $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme.
- Alors $f^{-1} : F \rightarrow E$, est aussi un isomorphisme.

Démonstration

Soient $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme et $f^{-1} : F \rightarrow E$ sa réciproque.

Alors : $\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

On sait déjà que f^{-1} est bijective

Montrons que f^{-1} est linéaire

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2, (y_1, y_2) \in F^2$.

Montrons que : $f^{-1}(a.y_1 + b.y_2) = a.f^{-1}(y_1) + b.f^{-1}(y_2)$

Ce qui équivaut à montrer que $a.y_1 + b.y_2 = f[a.f^{-1}(y_1) + b.f^{-1}(y_2)]$

Calculons :

$$f[a.f^{-1}(y_1) + b.f^{-1}(y_2)] = a.f[f^{-1}(y_1)] + b.f[f^{-1}(y_2)]$$

car f est linéaire

$$= a.y_1 + b.y_2$$

par définition de la réciproque

Donc

$$f^{-1}(a.y_1 + b.y_2) = a.f^{-1}(y_1) + b.f^{-1}(y_2)$$

f^{-1} est donc bien linéaire. Et de plus elle est bijective.

Donc f^{-1} est bien un isomorphisme de F dans E .

fin demo

Propriété 13

- Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications linéaires telles que :
 $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.
- Alors f et g sont bijectives et $g = f^{-1}$.

Découle des rappels.

Propriété 14 : Composée d'isomorphismes

- Soient E, F, G trois espaces vectoriels.
- Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux isomorphismes
- Alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G .
- et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Découle de la linéarité de la composée de deux a.l. et de la bijectivité de la composée de deux bijections.

Définition 12 Groupe linéaire de E

- Soit E un espace vectoriel.
- L'ensemble des automorphismes de E muni de la composition est noté $\text{GL}(E)$ et appelé le **groupe linéaire de E**

Définition 13 : Espaces vectoriels isomorphes

- Soient E et F deux espaces vectoriels.
- E sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de E dans F

4 Cas de la dimension finie

Propriété 15

- Soient E un e.v. de dimension finie de base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$
- et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire
- Alors
 $\text{Im}f = \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$ avec $f(\mathcal{B}) = (f(u_1), \dots, f(u_n))$

Exemple :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 3x - y + z, -7x + 7y - z)$$

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3

$u_1 = f(e_1) = (1, 3, -7), u_2 = f(e_2) = (2, -1, 7), u_3 = f(e_3) = (1, 1, -1)$

(u_1, u_2, u_3) engendre $\text{Im}f$

Il n'y a par contre aucune raison a priori pour que (u_1, u_2, u_3) soit une **base** de $\text{Im}f$, cad soit libre.

Démonstration

Soit $f : E \xrightarrow{\text{a.l.}} F$ et $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E

Montrons $\text{Im}f = \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$ par double inclusion

\subset Soit $v \in \text{Im}f$

$$\Rightarrow \exists u \in E, v = f(u)$$

avec (u_1, \dots, u_n) une base de E
 $\Rightarrow \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $u = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$
 $\Rightarrow v = f(u) = f(a_1u_1 + \dots + a_nu_n) = a_1f(u_1) + \dots + a_nf(u_n)$
 $\Rightarrow v \in \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$
 \supset Soit $v \in \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$
 $\Rightarrow \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = a_1f(u_1) + \dots + a_nf(u_n)$
 $\Rightarrow v = f(u)$ avec $u = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$ car f est linéaire
 $\Rightarrow v \in \text{Im}f$ CQFD

*fin demo***Propriété 16 : conséquence**

$$\left\| \begin{array}{l} \dim \text{Im}f \leq \dim E \\ \dim \text{Im}f \leq \dim F \end{array} \right.$$

Démonstration

Avec les notations précédentes, $n = \dim E$

Or $f(\mathcal{B})$ est une famille de n vecteurs qui engendre $\text{Im}f$

donc $\dim \text{Im}f \leq \dim E$

D'autre part, $\text{Im}f \subset F \Rightarrow \dim \text{Im}f \leq \dim F$

*fin demo***Propriété 17 : a.l. et base**

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } \mathcal{B} \text{ une base de } E \text{ et } f : E \rightarrow F \text{ linéaire} \\ \bullet f \text{ est injective} \iff f(\mathcal{B}) \text{ est libre} \\ \bullet f \text{ est surjective} \iff f(\mathcal{B}) \text{ est génératrice de } F \\ \bullet f \text{ est bijective} \iff f(\mathcal{B}) \text{ est une base de } F \end{array} \right.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E

• f est injective $\iff f(\mathcal{B})$ est libre

\Rightarrow supposons f injective

Montrons que $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre

Soit (a_1, \dots, a_n) tq $a_1.f(e_1) + \dots + a_n.f(e_n) = 0_F$

$$\Rightarrow f(a_1.e_1 + \dots + a_n.e_n) = 0_F$$

$$\Rightarrow a_1.e_1 + \dots + a_n.e_n \in \text{Ker}f$$

Or f injective $\Rightarrow \text{Ker}f = \{0_E\}$

$$\Rightarrow a_1.e_1 + \dots + a_n.e_n = 0_E$$

$$\Rightarrow (a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0) \text{ car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est libre.}$$

Donc $f(\mathcal{B})$ est libre

\Rightarrow supposons $f(\mathcal{B})$ libre

Montrons que $\text{Ker}f = \{0_E\}$

Soit $u \in \text{Ker}f$

(e_1, \dots, e_n) est une base de E

donc il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $u = a_1.e_1 + \dots + a_n.e_n$

Or $u \in \text{Ker}f$

$$\Rightarrow f(u) = 0_F$$

$$\Rightarrow f(a_1.e_1 + \dots + a_n.e_n) = 0_F$$

$$\Rightarrow a_1.f(e_1) + \dots + a_n.f(e_n) = 0_F$$

Or $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.

$$\Rightarrow (a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$$

$$\Rightarrow u = a_1.e_1 + \dots + a_n.e_n = 0_E$$

D'où $\text{Ker}f \subset \{0_E\}$

Or $0_E \in \text{Ker}f$

Donc $\text{Ker}f = \{0_E\}$

• Mq f est surjective $\iff f(\mathcal{B})$ est génératrice

On a vu que $\text{Im}f = \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$

et que f surjective $\iff \text{Im}f = F$

Donc

f surjective

$$\iff \text{Im}f = F$$

$$\iff F = \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$$

$f(\mathcal{B})$ engendre F

• f est bijective $\iff f(\mathcal{B})$ base de F

se déduit des deux propriétés précédentes

*fin demo***Propriété 18 : conséquence**

Soit E, F deux e.v. de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ linéaire

- f est injective $\Rightarrow \dim E \leq \dim F$
- f est surjective $\Rightarrow \dim E \geq \dim F$
- f est bijective $\Rightarrow \dim E = \dim F$

Découle immédiatement de ce qui précède

Attention : les réciproques sont bien entendu FAUSSES !

Propriété 19 : « Le Tout ou Rien »

Soient E et F deux e.v. de **même dimension finie**
 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire
 Alors f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective

Démonstration

$$\dim E = \dim F = n$$

Soit \mathcal{B} une base de E

$f(\mathcal{B})$ est une famille de n vecteurs dans F qui est un espace de dimension n .

Donc

$$f(\mathcal{B}) \text{ libre} \iff f(\mathcal{B}) \text{ génératrice} \iff f(\mathcal{B}) \text{ libre}$$

Et donc, d'après le théorème

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

*fin demo***Propriété 20 : Cas particulier des endomorphismes**

Soit E un e.v. de **dimension finie**
 et f un endomorphisme de E

$$\text{Alors } f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Propriété 21 : Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Soient E, F deux e.v. de **même dimension finie**
 et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow E$ deux applications linéaires

$$\text{Si } f \circ g = \text{Id}_F \quad \text{OU} \quad g \circ f = \text{Id}_E$$

Alors f et g sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre

Remarque : Dans le cas de dimensions quelconques, on rappelle que l'ont doit

avoir **les DEUX relations** pour conclure.

Ici, **une seule** des deux suffit.

Démonstration

Supposons $g \circ f = \text{Id}_E$

Montrons que f est injective

Soient $u, v \in E^2$ tels que $f(u) = f(v)$

$$\Rightarrow g(f(u)) = g(f(v))$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(u) = (g \circ f)(v)$$

$$\Rightarrow u = v \quad \text{car } g \circ f = \text{Id}_E$$

Donc f est injective

Or $\dim E = \dim F$ est finie

Donc f est également surjective et bijective

Elle admet donc une réciproque f^{-1}

Donc

$$\begin{aligned} f^{-1} &= \text{Id}_E \circ f^{-1} \\ &= (g \circ f) \circ f^{-1} \\ &= g \circ (f \circ f^{-1}) \\ &= g \circ \text{Id}_F \\ &= g \end{aligned}$$

Donc g est la réciproque de f et est donc également bijective

On procéderait de même dans le cas où $f \circ g = \text{Id}_F$

CQFD

*fin demo***Propriété 22 : isomorphisme des coordonnées**

Soit E un espace vectoriel de dimension n

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base vecteurs de E

Alors l'application $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow E, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

est un isomorphisme

De plus, son isomorphisme réciproque φ^{-1} est l'application coordonnées dans la base \mathcal{B} : à tout vecteur u de E elle associe ses coordonnées dans la base \mathcal{B} .

Cela signifie simplement qu'à tout vecteur correspond un unique n -uplet de coordonnées et réciproquement.

5 Modes de définition des applications linéaires

Propriété 23 : Image d'une base

Soit $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ une base d'un e.v. E

Et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire

Alors f est définie de façon unique par $f(u_1), \dots, f(u_n)$. Cad

Quelques soient (v_1, \dots, v_n) n vecteurs de F , il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que

$$f(u_1) = v_1, \dots, f(u_n) = v_n$$

Autre formulation

Une application linéaire est caractérisée de façon unique par l'image des vecteurs d'une base de E .

Démonstration

fin demo

- Unicité Soient f et g deux applications linéaires

Soit $u \in E$

Montrons que $f(u) = g(u)$

Il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(u) &= f(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) \\ &= a_1 f(e_1) + \dots + a_n f(e_n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(u) = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

De même, $g(u) = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$

Donc, $\forall u \in E, f(u) = g(u)$

$$\Rightarrow f = g.$$

- Existence

Pour tout $u \in E$ de coordonnées (a_1, \dots, a_n) dans la base \mathcal{B} , on pose

$$f(u) = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

Vérifions que f est une application linéaire

Soit u, v de coordonnées (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) dans \mathcal{B}

et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$

$\lambda u + \mu v$ a pour coordonnées $(\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\lambda u + \mu v) &= \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + \mu y_k) u_k \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n x_k u_k + \mu \sum_{k=1}^n y_k u_k \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

f est linéaire

D'autre part on a trivialement $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_k) = u_k$

CQFD

Propriété 24 : Restriction d'une a.l.

Soit E_1 un sev de E et $f : E \rightarrow F$ une a.l.

Alors la restriction de f à E_1 : $f|_{E_1} : E_1 \rightarrow F$ définie par

$\forall u \in E_1, f_1(u) = f(u)$ est encore une application linéaire

Propriété 25 : Cas d'espaces supplémentaires

Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un ev et $f : E \rightarrow F$ une a.l.

f est définie de façon unique par ses restrictions à E_1 et E_2

c'est-à-dire

Pour toutes applications linéaires $f_1 : E_1 \rightarrow F$ et $f_2 : E_2 \rightarrow F$,

il existe une unique a.l. $f : E \rightarrow F$ telle que f_1 et f_2 sont les restrictions respectives de f à E_1 et E_2

6 Théorème du rang

Définition 14 : Rang d'une application

On appelle rang d'une application linéaire f l'entier égal à :

$\dim(\text{Im} f)$ On le note $\text{rg}(f)$

Propriété 26 : invariance du rang par isomorphisme

Soit $\varphi : E \rightarrow F$ un isomorphisme

Alors pour tout $f \in \mathcal{L}(F, G)$, $\text{rg}(f \circ \varphi) = \text{rg}(f)$

et pour tout $g \in \mathcal{L}(G, E)$, $\text{rg}(\varphi \circ g) = \text{rg}(g)$

Démonstration

- Soit $f \in \mathcal{L}(F, G)$ Mq $\text{rg}(f \circ \varphi) = \text{rg}(f)$
 $\text{rg}(f \circ \varphi) = \dim \text{Im}(f \circ \varphi) = f(\varphi(E)) = f(F) = \text{Im} f = \text{rg}(f)$
- Soit $g \in \mathcal{L}(G, E)$ Mq $\text{rg}(\varphi \circ g) = \text{rg}(g)$
 $\text{rg}(\varphi \circ g) = \dim \varphi(g(G))$

Or φ est injective, donc $\dim \varphi(g(G)) = \dim g(G) = \text{rg}(g)$

fin demo

Propriété 27 : Lemme

Soit E un ev de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire
Et E_1 un sev supplémentaire de $\text{Ker} f$ dans E
Alors la restriction de f au sev E_1 établit une bijection de E_1 dans $\text{Im} f$.

Propriété 28 : Théorème du rang

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. et E un ev de dimension finie
Alors le rang de f est fini et

$$\boxed{\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker} f) = \dim E}$$

Ou encore

$$\boxed{\dim(\text{Im} f) + \dim(\text{Ker} f) = \dim E}$$

C'est une conséquence du théorème suivant :

Démonstration

$\text{Ker} f$ est un sev de E

Donc il existe au moins un sev E_1 supplémentaire de $\text{Ker} f$ dans E

On a : $E = E_1 \oplus \text{Ker} f$ et donc $\dim E = \dim E_1 + \dim \text{Ker} f$

Notons g la restriction de f à E_1 au départ et à $\text{Im} f$ à l'arrivée

C'est-à-dire : $g : E_1 \rightarrow \text{Im} f, x \mapsto f(x)$.

Par définition, $\forall x \in E, f(x) \in \text{Im} f$.

Donc $\forall x \in E_1, g(x) = f(x) \in \text{Im} f$.

L'application g est donc bien définie. (Car toutes les images sont bien dans l'ensemble d'arrivée)

Montrons que g établit une bijection de E_1 dans $\text{Im} f$.

- Soit $v \in \text{Im} f$

Il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$

$u \in E = E_1 \oplus \text{Ker} f$

\Rightarrow il existe (u_1, u_2) tel que $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in \text{Ker} f$

$\Rightarrow v = f(u) = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ car *festlinaire*

$= g(u_1) + 0$ car $u_2 \in \text{Ker} f$

$v = g(u_1)$ avec $u_1 \in E_1$.

Donc g est surjective.

- Soit $u \in \text{Ker} g$

$\Rightarrow u \in E_1$ et $g(u) = 0$

$\Rightarrow f(u) = 0$

$\Rightarrow u \in \text{Ker} f$

$\Rightarrow u \in \text{Ker} f \cap E_1$

Or $E = \text{Ker} f \oplus E_1 \Rightarrow \text{Ker} f \cap E_1 = \{0\}$

$\Rightarrow u = 0$

Donc $\text{Ker} g = \{0\}$

g est injective

- $g : E_1 \rightarrow \text{Im} f$ est bijective

$\Rightarrow \dim E_1 = \dim \text{Im} f$

De plus $E = \text{Ker} f \oplus E_1$

$\Rightarrow \dim E = \dim \text{Ker} f + \dim E_1$

$\Rightarrow \dim E = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$.

fin demo

Propriété 29 : Conséquences

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow f \text{ injective} \\ \Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0_E\} \\ \Leftrightarrow \dim(\text{Ker} f) = 0 \\ \Leftrightarrow \dim(\text{Im} f) = \dim E \\ \text{ET} \\ \Leftrightarrow f \text{ surjective} \\ \Leftrightarrow \text{Im} f = F \\ \Leftrightarrow \dim(\text{Im} f) = \dim F \end{array}$$

Application : cela permet de trouver simplement une base de $\text{Im} f$ en calculant d'abord le noyau

Exemple :

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 3x - y + z, -7x + 7y - z)$
 Déterminer une base $\text{Ker } f$ puis de $\text{Im } f$

- Déterminons d'abord $\text{Ker } f$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in \text{Ker } f$$

$$\iff f(u) = 0$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ -7x + 7y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array} \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ -6x + 9y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} 2L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 + 3L_2 \end{array} \begin{cases} 7y + 2z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff u = \left(\frac{3}{2}y, y, -\frac{7}{2}y\right) = \frac{y}{2}(3, 2, -7)$$

$$\Rightarrow u \in \text{Vect}(u_0) \quad \text{avec } u_0 = (3, 2, -7)$$

Donc $\text{Ker } f \subset \text{Vect}(u_0)$

De plus $f(u_0) = (3 + 4 - 7, 9 - 2 - 7, -21 + 14 + 7) = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow u_0 \in \text{Ker } f \Rightarrow \text{Vect}(u_0) \subset \text{Ker } f$$

Donc $\text{Vect}(u_0) = \text{Ker } f \neq \{0\} \Rightarrow (u_0)$ base de $\text{Ker } f$

$$\Rightarrow \dim \text{Ker } f = 1$$

- D'après le théorème du rang

$$\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$\Rightarrow \dim \text{Im } f = 2$$

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 3x - y + z, -7x + 7y - z)$
 $f(1, 2, 3) = (8, 4, 4) \in \text{Im } f$

Donc, pour avoir une base de $\text{Im } f$, il suffit d'avoir une famille libre de deux vecteurs de $\text{Im } f$

Par exemple, prenons

$$u_1 = f(e_1) = (1, 3, -7) \text{ et } u_2 = f(e_2) = (2, -1, 7) \text{ appartiennent à } \text{Im } f$$

u_1 et u_2 sont non colinéaires donc

(u_1, u_2) est une famille libre de 2 vecteurs dans $\text{Im } f$ qui est de dimension 2

Donc (u_1, u_2) est une base de $\text{Im } f$

Lemme

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } E_1 \text{ sev de } E \\ \text{Alors } \dim f(E_1) \leq \dim E_1 \end{array} \right.$$

Démonstration : On considère f' la restriction de f à E_1

fin demo

Propriété 30 : Rang d'une composée

$$\left\| \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } g \in \mathcal{L}(F, G) \\ \bullet \text{ rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g)) \\ \bullet \text{ rg}(g \circ f) \leq \min(\dim E, \dim F, \dim G) \end{array} \right.$$

Démonstration

- On a $g \circ f : E \rightarrow G$

$$\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$$

$$\Rightarrow \dim \text{Im}(g \circ f) \leq \dim \text{Im } g$$

$$\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } g$$

- Mq $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im } f)$

$$w \in \text{Im}(g \circ f)$$

$$\Rightarrow \exists u \in E, w = (g \circ f)(u)$$

$$\Rightarrow w = g(v) \text{ avec } v = f(u) \in \text{Im } f$$

$$\Rightarrow w \in g(\text{Im } f)$$

Réciproquement $w \in g(\text{Im } f)$

$$\Rightarrow \exists v \in \text{Im } f, w = g(v)$$

$$v \in \text{Im } f \Rightarrow \exists u \in E, v = f(u)$$

$$\Rightarrow w = (g \circ f)(u), u \in E$$

$$\Rightarrow w \in \text{Im}(g \circ f)$$

- $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im } f)$

Donc, d'après le lemme

$$\dim g(\text{Im } f) \leq \dim \text{Im } f$$

$$\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } f$$

- $\text{rg } f \leq \min(\dim E, \dim F)$ et $\text{rg } g \leq \min(\dim F, \dim G)$

avec $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$

$$\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) \leq \min(\dim E, \dim F, \dim G)$$

fin demo

7 Homothéties, projections et symétries

Définition 15 : Homothéties (vectorielles)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On appelle homothétie de rapport λ l'application linéaire $h_\lambda : E \rightarrow E, u \mapsto \lambda.u$

On a $h_\lambda = \lambda.Id_E$

Les homothéties sont des automorphismes de E

Les matrices de homothéties sont égales à $\lambda.I_n$ dans toutes les bases de E

L'idée est de généraliser la projection et la symétrie orthogonale au cas non orthogonal

Sur le dessin ci-dessus, le vecteur u se décompose comme une somme $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$

(On reconnaît la décomposition dans une somme directe de sev : $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$)

On va dire que v est le projeté de u sur F parallèlement à G

De même, w est le projeté de u sur G parallèlement à F

En notant $p = p_F^G$ l'application projection sur F parallèlement à G , on aura alors

$$v = p(u) \text{ et } w = u - v = u - p(u)$$

D'autre part, on va dire que $s(u)$ est le symétrique de u par rapport à F et parallèlement à G

On a alors $s(u) = v - w$

En additionnant avec $u = v + w$, on obtient :

$$u + s(u) = 2v = 2p(u)$$

Cela se généralise au cas non orthogonal :

On a $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w = u - v \in G$

Et dans ce cas v est le projeté de u sur F parallèlement à G

Ce qui conduit à la définition suivante :

Définition 16 : projection

Soit F et G deux sev **supplémentaires** dans E

Pour tout $u \in E$, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que

$$v \in F \text{ et } u - v \in G$$

v est appelé le **projeté** de u sur F parallèlement à G

On note alors $p(u) = v$ où $p = p_F^G$ est appelé la **projection** sur F parallèlement à G

F et G sont aussi appelés les **éléments propres** de p

Retenir la caractérisation de la projection sur F parallèlement à G

$$\forall (u, v) \in E^2, v = p(u) \iff \begin{cases} v \in F \\ v - u \in G \end{cases}$$

Bien sûr cela marche aussi pour des dimensions supérieures. par exemple dans \mathbb{R}^3 :

Définition 17 : projections associées

Si $p = p_F^G$ est la projection sur F parallèlement à G et $q = p_G^F$ la projection sur G parallèlement à F

Alors on dit que p et q sont deux projections associées

A retenir :

Pour déterminer le projeté d'un vecteur, (ou son symétrique) il faut d'abord le décomposer dans $F + G$, c'est-à-dire trouver $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$

Exemple 1 :

Dans \mathbb{R}^3 : $F = \text{Vect}(e_1, e_3)$ et $G = \text{Vect}(e_2)$ On a $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

Notons $p = p_F^G$ la projection sur F parallèlement à G et $q = p_G^F$

- $u = (x, y, z)$. Déterminer $p(u)$ et $q(u)$
- Donner les matrices de p et q dans la base canonique

- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Il faut trouver une décomposition de u dans $F + G$

Ici c'est très simple :

$$u = (x, y, z) = x.e_1 + y.e_2 + z.e_3$$

A l'évidence, $(x.e_1 + z.e_3) \in F$ et $y.e_2 \in G$

donc

$$u = \underbrace{(xe_1 + ze_3)}_{\in F} + \underbrace{ye_2}_{\in G} = \underbrace{(x, 0, z)}_{\in F} + \underbrace{(0, y, 0)}_{\in G}$$

On a donc $p(u) = p(x, y, z) = (x, 0, z)$ et $q(u) = (0, y, 0)$

- Déterminons les matrices.

Posons $M = \text{Mat}_C(p)$ et $N = \text{Mat}_C(q)$

On a $Y = MX$ avec X les coordonnées de u et Y les coordonnées de $p(u)$ dans la base canonique

Donc

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{De même } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

Mêmes questions dans \mathbb{R}^3 avec $F = \text{Vect}(u_1)$ et $G = \text{Vect}(u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ $u_3 = (0, 1, 2)$ (On justifiera aussi que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$)

C'est un peu plus compliqué car il va falloir faire des calculs.

Posons $p = p_F^G$ la projection sur F parallèlement à G

et $q = p_G^F$ la projection sur G parallèlement à F

- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Il faut trouver $(v, w) \in F \times G$ tels que $u = v + w$

(et dans ce cas, on aura $v = p(u)$ et $w = q(u)$)

$$v \in F = \text{Vect}(u_1) \Rightarrow v = a.u_1$$

$$w \in G = \text{Vect}(u_2, u_3) \Rightarrow w = b.u_2 + c.u_3 \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

Donc

$$u = v + w$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, u = \underbrace{au_1}_{\in F} + \underbrace{bu_2 + cu_3}_{\in G}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ a + c = y \\ b + 2c = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} a + b = x \\ -b + c = -x + y \\ b + 2c = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} a + b = x \\ -b + c = -x + y \\ 3b = 2x - 2y + z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} 3L_1 - L_3 \\ 3L_2 + L_3 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 3a = x + 2y - z \\ 3c = -x + y + z \\ 3b = 2x - 2y + z \end{cases}$$

L'unicité du triplet (a, b, c) prouve l'unicité du couple (v, w)

Donc F et G sont bien en somme directe et donc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow p(u) = v = a.u_1 = \underbrace{\frac{1}{3}(x + 2y - z)}_{=a} \cdot \underbrace{(1, 1, 0)}_{u_1} = \left(\frac{x+2y-z}{3}, \frac{x+2y-z}{3}, 0 \right)$$

$$Y = MX \Leftrightarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ x + 2y - z \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \text{Mat}_{C_3}(p) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $q(u) = w = bu_2 + cu_3 = u - v$

$$= (x, y, z) - \frac{1}{3}(x + 2y - z, x + 2y - z, 0)$$

$$= \left(x - \frac{1}{3}(x + 2y - z), y - \frac{1}{3}(x + 2y - z), z \right)$$

$$= \frac{1}{3}(2x - 2y + z, -x + y + z, 3z)$$

$$\Rightarrow N = \text{Mat}_{C_3}(q) = I - M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarque : on a

$$q(u) = w = u - v = u - p(u)$$

$$\begin{aligned} \iff q(u) &= \text{Id}(u) - p(u) \\ \iff q(u) &= (\text{Id} - p)(u) \quad \forall u \in E \\ \iff q &= \text{Id} - p \\ \iff \text{Mat}(q) &= \text{Mat}(\text{Id} - p) \\ \iff N &= I - M \end{aligned}$$

Remarque : la connaissance de a suffisait pour trouver tous les résultats.

Propriété 31 : propriétés immédiates

Soient p la projection sur F parallèlement à G et q la projection associée. Alors

- p est linéaire
- $u \in \text{Imp} \iff p(u) = u \iff u \in F$
- $\text{Imp} = F$
- $\text{Kerp} = G$
- $p + q = \text{Id}_E$
- $p \circ q = q \circ p = \bar{0}$ (application nulle de E)

Démonstration

- Soient $u_1, u_2 \in E^2$, $a, b \in E^2$

Il existe $(v_1, w_1) \in F \times G$, $(v_2, w_2) \in F \times G$ tels que $u_1 = v_1 + w_1$, $u_2 = v_2 + w_2$ et donc $v_1 = p(u_1)$, $v_2 = p(u_2)$

D'où

$$\begin{aligned} a.u_1 + b.u_2 &= a.(v_1 + w_1) + b.(v_2 + w_2) \\ &= \underbrace{(a.v_1 + b.v_2)}_{\in F} + \underbrace{(a.w_1 + b.w_2)}_{\in G} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(a.u_1 + b.u_2) = a.v_1 + b.v_2 = a.p(u_1) + b.p(u_2) \quad \text{CQFD}$$

Cela prouve que p est une application linéaire de E dans E , c'est-à-dire un endomorphisme de E

- Soit $u \in F$ On a alors $u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G} \Rightarrow p(u) = u$
- D'autre part, si $u \in \text{Imp}$, on a $u = p(v)$ avec $v \in E$
Et par définition $p(v) \in F \Rightarrow u \in F$
- On a donc la chaîne d'implications :

$$u \in F \Rightarrow p(u) = u \Rightarrow u \in \text{Imp} \Rightarrow u \in F$$

Ce qui prouve $u \in \text{Imp} \iff p(u) = u \iff u \in F$
et $\text{Imp} = F$

- Soit $u \in G \Rightarrow u = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in G} \Rightarrow p(u) = 0$

Réciproquement : Soit $u = v + w$ avec $(v, w) \in F \times G$

$$u \in \text{Kerp} \Rightarrow p(u) = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$\Rightarrow u = w \text{ avec } w \in G \Rightarrow u \in G$$

Donc $\text{Kerp} = G$

- Soit $u = v + w$ avec $(v, w) \in F \times G$

$$v = p(u) \text{ et } w = q(u)$$

$$\Rightarrow p(u) + q(u) = u$$

$$\iff (p + q)(u) = \text{Id}(u), \forall u \in E$$

$$\Rightarrow p + q = \text{Id}_E$$

- On a vu que $\text{Kerp} = G$ et $\text{Imp} = F$

On a de même $\text{Ker}q = F$ et $\text{Im}q = G$ Soit $u \in E$,

$$p(u) \in \text{Imp} \text{ avec } \text{Imp} = F = \text{Ker}q$$

$$\Rightarrow p(u) \in \text{Ker}q$$

$$\Rightarrow q(p(u)) = 0$$

$$\forall u \in E, (q \circ p)(u) = 0$$

$$\Rightarrow q \circ p = \bar{0}$$

On a de même $p \circ q = \bar{0}$

fin demo

Propriété 32 : Caractéristique des projections

Soit p un endomorphisme d'un e.v. E

p est une projection ssi $p \circ p = p$

Et dans ce cas, p est la projection sur Imp parallèlement à Kerp

$$\text{Donc } p : E \rightarrow E \text{ projection} \iff \begin{cases} p \text{ est linéaire} \\ p \circ p = p \end{cases}$$

Démonstration

\Rightarrow Soit $p = p_F^G$ une projection.

On a vu que : $\forall u \in E, p(u) = u \iff u \in F$

Soit $u \in E$

On a $p(u) \in \text{Imp} = F$

$$\Rightarrow p(p(u)) = p(u)$$

$$\Rightarrow (p \circ p)(u) = p(u), \forall u \in E$$

$$\Rightarrow pop = p$$

D'autre part, on a vu que $F = \text{Imp}$ et $G = \text{Kerp}$

Donc p est bien la projection sur Imp parallèlement à Kerp

\Leftarrow Soit p une application linéaire telle que $p \circ p = p$

Soit $F = \text{Imp}$ et $G = \text{Kerp}$

On va montrer que $F \oplus G = E$ et que p est la projection sur F parallèlement à G

• Analyse : Soit $u \in E$

Supposons $u = v + w$ avec $v \in \text{Imp}$ et $w \in \text{Kerp}$

$$v \in \text{Imp} \Rightarrow \exists v_1 \in E, v = p(v_1)$$

$$w \in \text{Kerp} \Rightarrow p(w) = 0$$

Donc

$$p(u) = p(v) + p(w) = p(p(v_1)) + 0 = (p \circ p)(v_1) = p(v_1) \quad \text{car } p \circ p = p$$

$$\Rightarrow p(u) = v$$

$$\Rightarrow v = p(u) \text{ et } w = u - v = u - p(u)$$

Cela prouve l'unicité de la décomposition

• Synthèse : posons $v = p(u)$ et $w = u - p(u)$

On a $v + w = u$ trivial

$$v = p(u) \in \text{Imp}$$

$$p(w) = p(u - p(u)) = p(u) - p(p(u)) = p(u) - p(u) = 0$$

$$\Rightarrow w \in \text{Kerp}$$

• On a donc trouvé $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$

$$\Rightarrow p_F^G(u) = v = p(u)$$

$$\text{Donc } p = p_F^G$$

• Conclusion : p est bien la projection sur $F = \text{Imp}$ parallèlement à $G = \text{Kerp}$ CQFD

fin demo

Définition 18 Symétrie

Soit F et G deux sev supplémentaires dans E

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application

$$s : E \rightarrow E$$

définie par

Si $u = v + w$ avec $(v, w) \in F \times G$, alors $s(u) = v - w$

Exemple 1 :

Dans \mathbb{R}^3 : $F = \text{Vect}(e_1, e_3)$ et $G = \text{Vect}(e_2)$ On a $F \oplus G = \mathbb{R}^3$
 Notons $s = s_F^G$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G et de même $s' = s_G^F$
 Pour $u = (x, y, z)$, déterminer $s(u)$ et $s'(u)$
 Déterminer les matrices respectives de s et s' dans la base canonique de \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} u &= xe_1 + ze_3 + ye_2 \\ v &= xe_1 + ze_3 = (x, 0, z) \in F \\ w &= ye_2 = (0, y, 0) \in G \end{aligned}$$

$$s(u) = v - w = (x, -y, z)$$

$$\text{mat}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons $s' = s_G^F$ la symétrie par rapport à G parallèlement à F

$$s'(u) = w - v = (-x, y, -z)$$

Propriété 33 : propriétés des symétries

Soient F et G deux sev supplémentaires de E et $s = s_F^G$ et $p = p_F^G$

- $s = 2p - \text{Id}_E$
- s est un automorphisme de E
- $s \circ s = \text{Id}_E$
- $u \in F \iff s(u) = u$
- $u \in G \iff s(u) = -u$
- $s = p_F^G - p_G^F$

Démonstration Posons $p = p_F^G$ et $q = p_G^F$

- Pour $u = v + w$, $(v, w) \in F \times G$,
 $s(u) = v - w = 2v - (v + w) = 2v - u = 2p(u) - \text{Id}(u) = (2p - \text{Id})(u)$
 Donc $s = 2p - \text{Id}_E$
- p linéaire $\Rightarrow s$ linéaire
- Soit $u \in E$ et $(v, w) \in F \times G$, $u = v + w$
 $\Rightarrow s(u) = v - w = v + (-w)$
 $\Rightarrow s(s(u)) = v - (-w) = v + w = u$
 Donc $s \circ s = \text{Id}_E$
- $s \circ s = \text{Id}_E$ donc s est bijective et s est sa propre réciproque ($s^{-1} = s$)
 s est un automorphisme de E
- Soit $u = v + w \in F$ avec $(v, w) \in F \times G$
 $s(u) = u \iff v - w = v + w \iff w = 0 \iff u \in F$
 $s(u) = -u \iff v - w = -(v + w) \iff v = 0 \iff u \in G$
- $p + q = \text{Id}_E \Rightarrow p - \text{Id}_E = -q \Rightarrow 2p - \text{Id}_E = p - q \Rightarrow s = p - q$

fin demo

Propriété 34 : propriétés caractéristique des symétrie

Soit s un endomorphisme de E
 s est une symétrie $\iff s \circ s = \text{Id}_E$
 Et dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$

Démonstration Il suffit de poser $p = (s + \text{Id})/2$

On vérifie facilement que $p \circ p = p$ et donc p est une projection et s est la symétrie associée

fin demo

8 Matrices d'applications linéaires

Exemple

Prenons E un espace de dimension 2 et F un espace de dimension 3.
 $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ et $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ deux bases respectives de E et F .

Prenons une application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que :

$$f(u_1) = 2v_1 + v_2 + 5v_3$$

$$f(u_2) = v_1 + 3v_2 - 4v_3$$

$$f(u_1) = 2v_1 + v_2 + 5v_3 \iff \begin{matrix} f(u_1) \\ \mathcal{V} \end{matrix} \left| \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{matrix} \right.$$

$$f(u_2) = v_1 + 3v_2 - 4v_3 \iff \begin{matrix} f(u_2) \\ \mathcal{V} \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{matrix} \right.$$

$$\text{Mat}_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}(f) = \left(\begin{matrix} f(u_1) \\ f(u_2) \end{matrix}, \right)_{\mathcal{V}} = \left(\begin{matrix} f(u_1) & f(u_2) \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{matrix}, \right)_{(v_1, v_2, v_3)}$$

$$\text{Donc } M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Soit k un vecteur de coordonnées (x, y) dans la base \mathcal{U} .

Cherchons les coordonnées (x', y', z') de $f(k)$ dans la base \mathcal{V} .

$$\begin{aligned} f(k) &= f(x.u_1 + y.u_2) \\ &= x.f(u_1) + y.f(u_2) \\ &= x.(2v_1 + v_2 + 5v_3) + y.(v_1 + 3v_2 - 4v_3) \\ &= (2x + y).v_1 + (x + 3y).v_2 + (5x - 4y).v_3 \end{aligned}$$

Les coordonnées de $f(k)$ dans \mathcal{V} sont donc :

$$(x', y', z') = (2x + y, x + 3y, 5x - 4y)$$

$$\text{D'où } \begin{matrix} f(k) \\ \mathcal{V} \end{matrix} \left| \begin{matrix} 2x + y \\ x + 3y \\ 5x - 4y \end{matrix} \right.$$

Cela s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 3y \\ 5x - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire $Y_{\mathcal{V}}^{f(k)} = M.X_{\mathcal{U}}^k$ ou plus simplement $Y = MX$ avec

- $Y = Y_{\mathcal{V}}^{f(k)}$ est la matrice colonne des coordonnées de $f(u)$ dans la base \mathcal{V}
- $X = X_{\mathcal{U}}^k$ est la matrice colonne des coordonnées de u dans la base \mathcal{U}

M est appelée la matrice de f dans les bases \mathcal{U} et \mathcal{V} .

Deux formules à retenir :

$$\boxed{\text{Mat}_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}(f) = \begin{pmatrix} f(u_1) \\ \vdots \\ f(u_n) \end{pmatrix}_{\mathcal{V}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Y = MX}$$

8.1 Théorèmes et propriétés

Définition 19 : Matrice d'une application

Soient E, F deux ev de dimension respectives n et p ,
 $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, \mathcal{U} et \mathcal{V} deux bases respectives de E et F .
 Alors la matrice des coordonnées en colonnes des images des vecteurs de \mathcal{U} dans la base \mathcal{V} est appelée la matrice de f dans les bases \mathcal{U}, \mathcal{V} .
 On la note : $\text{Mat}_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}(f)$
 Cette matrice appartient à $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{K})$

Cela s'écrit de façon résumée ainsi :

$$M = M_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}(f) = \begin{pmatrix} f(u_1) \\ \vdots \\ f(u_n) \end{pmatrix}_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n) \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$$

Définition 20 : cas d'un endomorphisme

Soit f un endomorphisme d'un e.v. E de base \mathcal{B}
 On note alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$

C'est-à-dire que quand la base à l'arrivée est identique à la base de départ, on ne répète pas le nom de la base.

Coordonnées de l'image d'un vecteur

Posons X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur k de E dans \mathcal{U} .
 Posons Y la matrice colonne des coordonnées du vecteur $f(k)$ de F dans \mathcal{V} .

On a alors : $\boxed{Y = M.X}$ ou encore $Y_{\mathcal{V}}^{f(\vec{k})} = M.X_{\mathcal{U}}^{\vec{k}}$

Propriété 35 : Image d'un vecteur par une matrice

Soient $f : E \rightarrow F$ une application linéaire,
 $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_p)$ les bases de E et F
 et $M \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{K})$
 Alors
 $M = \text{Mat}_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}(f)$
 \iff pour tout $k \in E$ de coordonnées X dans \mathcal{U} ,
 $f(k)$ a pour coordonnées $Y = MX$ dans la base \mathcal{V}

Démonstration

\Rightarrow Supposons $M = \text{Mat}_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}(f)$

Alors $\forall j \in [[1, n]], f(u_j) = \sum_{i=1}^p m_{i,j} v_i$

Soit $k \in E$ de coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{U}

Par multiplication matricielle, on a $Y = MX$

Donc $\forall i \in [[1, p]], y_i = \sum_{k=1}^n m_{i,k} x_k$

Montrons que Y donne les coordonnées de $f(k)$ dans \mathcal{V} :

$k \in E$ de coordonnées (x_1, \dots, x_n)

$\iff k = \sum_{j=1}^n x_j u_j$

$\Rightarrow f(k) = \sum_{j=1}^n x_j f(u_j)$ car f est linéaire

$$= \sum_{j=1}^n \left(x_j \sum_{i=1}^p m_{i,j} v_i \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p x_j m_{i,j} v_i$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n x_j m_{i,j} v_i$$

$$= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n x_j m_{i,j} \right) v_i$$

$$= \sum_{i=1}^p y_i v_i$$

Donc $f(k)$ a bien pour coordonnées (y_1, \dots, y_k) dans \mathcal{V} avec $Y = MX$

⇐ Réciproquement

Soit M une matrice tel que, pour tout k est coordonnées X dans \mathcal{U} , $f(k)$ a pour coordonnées $Y = MX$ dans \mathcal{V}

Montrons que M est bien la matrice de f dans $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$

Posons $k = e_j$ qui a pour coordonnées (x_k) avec $x_k = \delta_k^j$ dans \mathcal{U}
 $f(e_j)$ a donc pour coordonnées (y_i) avec $Y = MX$ avec

$$y_i = \sum_{k=1}^n m_{i,k} x_k = \sum_{k=1}^n m_{i,k} \delta_k^j = m_{i,j}$$

Donc $f(e_j) = \sum_{i=1}^p y_i v_i = \sum_{i=1}^p m_{i,j} v_i$

Donc M est bien la matrice de f dans les bases $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ CQFD

fin demo

Propriété 36 : propriétés immédiates

- Soient E et F des ev de bases \mathcal{U}, \mathcal{V}
- et $f, g : E \rightarrow F$ des applications linéaires
- $\text{Mat}(f) = \text{Mat}(g) \iff f = g$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{K}^2, \text{Mat}(a.f + b.g) = a.\text{Mat}(f) + b.\text{Mat}(g)$

Propriété 37 : Théorème

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions n et p .
 et \mathcal{U}, \mathcal{V} des bases respectives de E et F .

Alors l'application

$$\varphi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{K})$$

$$f \mapsto \text{Mat}_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}(f)$$

est une application linéaire bijective (un isomorphisme)

A toute application linéaire on peut donc associer une matrice dans des bases données. Et réciproquement, à toute matrice on peut associer une application linéaire dont c'est la matrice dans des bases données.

Propriété 38 : Conséquence

- Si $\dim E = n \quad \dim F = p$
- Alors $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim \mathcal{M}_{(p, n)}(\mathbb{K}) = n.p$

Propriété 39 : Matrice d'une composée

- Soient E, F, G des ev de bases $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$
- et $f : E \rightarrow F, \quad g : F \rightarrow G$ des applications linéaires
- Alors $\text{Mat}_{(\mathcal{U}, \mathcal{W})}(g \circ f) = \text{Mat}_{(\mathcal{V}, \mathcal{W})}(g) \cdot \text{Mat}_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}(f)$

Démonstration

$f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont des applications linéaires.

Soit $X_{\mathcal{U}}^k$ les coordonnées d'un vecteur k dans \mathcal{U}

On a donc :

$$Y_{\mathcal{V}}^{f(k)} = \text{Mat}_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}(f) X_{\mathcal{U}}^k$$

et $Z_{\mathcal{W}}^{g(f(k))} = \text{Mat}_{(\mathcal{V}, \mathcal{W})}(g) Y_{\mathcal{V}}^{f(k)}$

Et donc

$$Z_{\mathcal{W}}^{(g \circ f)(k)} = (\text{Mat}_{(\mathcal{V}, \mathcal{W})}(g) \text{Mat}_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}(f)) X_{\mathcal{U}}^k$$

Ce qui prouve que : $\text{Mat}_{(\mathcal{U}, \mathcal{W})}(g \circ f) = \text{Mat}_{(\mathcal{V}, \mathcal{W})}(g) \cdot \text{Mat}_{(\mathcal{U}, \mathcal{V})}(f)$

fin demo

Propriété 40 : a.l. canoniquement associée à une matrice

- Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$
- et $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à M
- Alors $M = \text{Mat}_{(\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_n)}(f)$
- où $\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_n$ sont les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n$

Rappel : l'application canoniquement associée à M est

$$f_M : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n, X \mapsto Y = MX$$

Exemple : soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

On a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix}$

Donc l'application linéaire f canoniquement associée à M est définie par

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z)$$

8.2 Bijektivité et inversibilité

Propriété 41 : Matrice de l'identité

Soit B une base d'un e.v E de dimension finie n
 Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$

Démonstration Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$$\text{Id}_E(e_j) = e_j \quad \text{Donc} \quad \text{Id}_E(e_j) = \sum_{i=1}^n \delta_{i,j} e_i$$

D'où $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = (\delta_{i,j}^j)_{1 \leq i,j \leq n} = I_n$

fin demo

Propriété 42 : Bijektivité et inversibilité

Soient E, F deux e.v. de dimensions finies et de bases respectives \mathcal{B}, \mathcal{C}
 Soient $f : E \rightarrow F$ et $M = \text{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f)$
 Alors M est inversible $\iff f$ est bijective.
 Et dans ce cas M^{-1} est la matrice de f^{-1} dans les bases \mathcal{C}, \mathcal{B}
 C'est-à-dire : $(\text{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f))^{-1} = \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{B})}(f^{-1})$

Démonstration

On rappelle qu'une matrice M est inversible ssi il existe une matrice N telle que $MN = I$ et $NM = I$ (Bien noter que la définition exige les **deux** relations)

Remarquons qu'à ce stade, rien n'exige que les matrices M et N soient carrées. (Cela sera une conséquence de cette propriété)

On a $\text{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{B})}(\text{Id}_E) = I$ et $\text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{C})}(\text{Id}_F) = I$

\Rightarrow Supposons M inversible.

Alors il existe une matrice N telle que $M.N = I$ et $N.M = I$

Soit $g : F \rightarrow E$ l'application linéaire telle que $N = \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{B})}(g)$

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{C})}(f \circ g) &= \text{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f) \cdot \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{B})}(g) = M.N = I \\ &= \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{C})}(\text{Id}_F) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f \circ g = \text{Id}_F$

De même,

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{B})}(g \circ f) &= \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{B})}(g) \cdot \text{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f) = N.M = I \\ &= \text{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{B})}(\text{Id}_E) \end{aligned}$$

$\Rightarrow g \circ f = \text{Id}_E$

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_F$$

Donc f est bijective et $g = f^{-1}$

Et on a : $M^{-1} = N = \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{B})}(g) = \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{B})}(f^{-1})$

De plus, f est bijective donc $\dim E = \dim F$ ce qui implique que M et N sont des matrices carrées

\Rightarrow Supposons f bijective

Alors il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$

Posons $N = \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{B})}(g)$

On a :

$$\begin{aligned} M.N &= \text{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f) \cdot \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{B})}(g) = \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{C})}(f \circ g) \\ &= \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{C})}(\text{Id}_F) = I \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} N.M &= \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{B})}(g) \cdot \text{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f) = \text{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{B})}(g \circ f) \\ &= \text{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{B})}(\text{Id}_E) = I \end{aligned}$$

$M.N = N.M = I_n$ Donc M est inversible

CQFD

fin demo

Nous avons donc pour conséquence sur les matrices :

Propriété 43 : matrices inversibles

Soit $M \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{K})$ telles que

$$M.N = I_n \quad \text{et} \quad N.M = I_p$$

Alors $n = p$

C'est-à-dire : les matrices inversibles sont des matrices carrées

Nous allons montrer maintenant que pour qu'une matrice carrée M soit inversible, il suffit d'avoir $MN = I$ **OU** $NM = I$ (et non pas nécessairement les deux égalités.)

Propriété 44 : inversibilité des matrices carrées

Soit M, N deux matrices carrées d'ordre n

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & MN = I_n \quad (M \text{ inversible à droite}) \\ \iff & NM = I_n \quad (M \text{ inversible à gauche}) \\ \iff & M \text{ et } N \text{ sont inversibles et inverses l'une de l'autre} \\ \iff & MN = NM = I \end{aligned}$$

Démonstration

M et N sont des matrices carrées d'ordre n

On peut donc leur associer canoniquement les a.l. $f, g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ telles que $M = \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{C})}(f)$ et $N = \text{Mat}_{(\mathcal{C}, \mathcal{C})}(g)$

On a alors $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$ ou $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$

Et comme on est en dimension finie et que les espaces de départ et d'arrivée sont égaux et donc a fortiori de même dimension, cela implique que f et g sont bijectives et donc M et N sont inversibles.

fin demo

Propriété 45 : automorphismes et inversibilité

Soient \mathcal{B} une base de E , f un endomorphisme de E et M sa matrice dans la base \mathcal{B} . Alors

$$M \text{ est inversible} \iff f \text{ est un automorphisme de } E \iff f \in GL(E).$$

Et dans ce cas M^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base \mathcal{B} :

$$M^{-1} = \text{Mat}_{(\mathcal{B})}(f^{-1})$$

Propriété 46 : non inversibilité

M non inversible

$$\iff \text{il existe } X \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{K}) \text{ tel que } X \neq 0 \text{ et } M.X = 0$$

Démonstration

Soient M une matrice carrée d'ordre n et f l'application linéaire canoniquement associée à M , c'est-à-dire dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{K}^n est M

On a alors :

M est non inversible

$$\iff f \text{ est non bijective}$$

$$\iff f \text{ est non injective}$$

car f est un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie : \mathbb{R}^n

$$\iff \text{Ker } f \neq \{0\}$$

$$\iff \text{il existe } u \in \text{Ker } f \text{ tel que } u \neq 0$$

$$\iff \exists u \neq 0 \text{ tel que } f(u) = 0$$

$$\iff \exists X \neq 0 \text{ tel que } M.X = 0$$

X étant le vecteur des coordonnées de u dans \mathcal{C} .

fin demo

Définition 21 : groupes linéaires

L'ensemble des automorphismes de E est appelé le groupe linéaire de E .
On le note $GL(E)$

L'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n est appelé le groupe linéaire (d'ordre n). On le note $GL_n(\mathbb{K})$

Démonstration

Si on prend deux automorphismes f et g de E , alors, d'après ce qui précède, $g \circ f$ est aussi un automorphisme de E . $\Rightarrow g \circ f \in GL(E)$

Si on prend un automorphisme f de E , sa réciproque f^{-1} est également un automorphisme de E : $f^{-1} \in GL(E)$

L'application Identité de E (Id_E) est un automorphisme de E . $Id_E \in GL(E)$.

Comme son nom semble l'indiquer (et il semble bien!) le groupe linéaire est un groupe.

Dans le cas de $GL(E)$, l'élément neutre est l'application identité Id_E et le symétrique de f est l'application réciproque f^{-1} .

fin demo

8.3 Rang**Définition 22 : Rang d'une matrice**

Soit M une matrice (n, p) constituée de p vecteurs colonnes C_1, \dots, C_p .
Alors $rg(M) = rg(C_1, \dots, C_p) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$

Propriété 47 : Matrice et application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F et M la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} de E et F

$$\text{Alors } rg(f) = rg(M)$$

Propriété 48 : Inversibilité

|| Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 || Alors M est inversible $\iff \text{rg}(M) = n$

Propriété 49 : Produit par une inversible

|| Soient $P \in GL_n(\mathbb{K})$ $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
 || Alors $\text{rg}(PM) = \text{rg}(MQ) = \text{rg}(M)$

Propriété 50 : Transposée

|| Soit M une matrice. Alors $\text{rg}(M^T) = \text{rg}(M)$

Propriété 51 : Inégalité

|| Soit M, N deux matrices respectivement $[n, p]$ et $[p, q]$
 || Alors $\text{rg}(MN) \leq \min(\text{rg}(M), \text{rg}(N))$

8.4 Matrices de passage et changement de base

Définition 23 : Matrice de vecteurs dans une base

|| Soient E un e.v. de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$
 || et $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs. On note alors $\text{Mat}(\mathcal{U})_{\mathcal{B}}$
 || la matrice formée des coordonnées en colonnes des vecteurs de \mathcal{U} dans \mathcal{B}
 || De plus $\text{Mat}(\mathcal{U})_{\mathcal{B}}$ est inversible ssi \mathcal{U} est une base de E

Exemple :

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E
 Soient (u, v, w) trois vecteurs de E tels que

$$u = e_1 + 2e_2 + 3e_3, \quad v = e_1 + e_2, \quad w = e_1 - e_2 + e_3$$

Ces vecteurs ont donc pour coordonnées dans la base \mathcal{B} :

$$u_{\mathcal{B}} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}; \quad v_{\mathcal{B}} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad w_{\mathcal{B}} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

On obtient alors : $\text{Mat}(\mathcal{U})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

Remarque : avec cette notation on a :

$$\text{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{C})}(f) = \text{Mat}(f(\mathcal{B}))_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}} = \text{Mat}(\mathcal{U})_{\mathcal{B}}$$

Ce qui donne
$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{U}} = \text{Mat}(\mathcal{U})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathcal{U} \\ \phantom{\mathcal{U}} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Soient deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ du même e.v. E .

On peut écrire

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}(\mathcal{B}')_{\mathcal{B}} = \text{Mat}(\text{Id}_E(\mathcal{B}'))_{\mathcal{B}} = \text{Mat}_{(\mathcal{B}', \mathcal{B})}(\text{Id}_E)$$

ou encore

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}' \\ \phantom{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \text{Id}_E(\mathcal{B}') \\ \phantom{\text{Id}_E(\mathcal{B}')} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \text{Mat}_{(\mathcal{B}', \mathcal{B})}(\text{Id}_E)$$

D'après la formule $Y = MX$, on peut écrire, pour tout vecteur $u \in E$:

$$Y_{\mathcal{B}}^{\text{Id}_E(u)} = \text{Mat}_{(\mathcal{B}', \mathcal{B})}(\text{Id}_E) \cdot X_{\mathcal{B}'}^u$$

C'est-à-dire $X_{\mathcal{B}}^u = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \cdot X_{\mathcal{B}'}^u$

Remarque : On a remplacé Y par X car c'est le même vecteur u dont on a les coordonnées dans deux bases différentes.

Par conséquent on aura la merveilleuse formule de changement de base :

Propriété 52 : Formule de changement de base

|| Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases d'un même espace vectoriel E et $u \in E$
 || On a alors : $X_{\mathcal{B}}^u = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \cdot X_{\mathcal{B}'}^u$
 || ou plus simplement : $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \cdot X_{\mathcal{B}'}$