1 Fonctions en escaliers

Définition 1 : Subdivision (SAVOIR)

On appelle subdivision du segment $[a,b]$ une suite finie

$$\sigma = (a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)$$

de réels telle que

$$a_0 = a, \quad a_n = b \quad \text{et} \quad a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$$

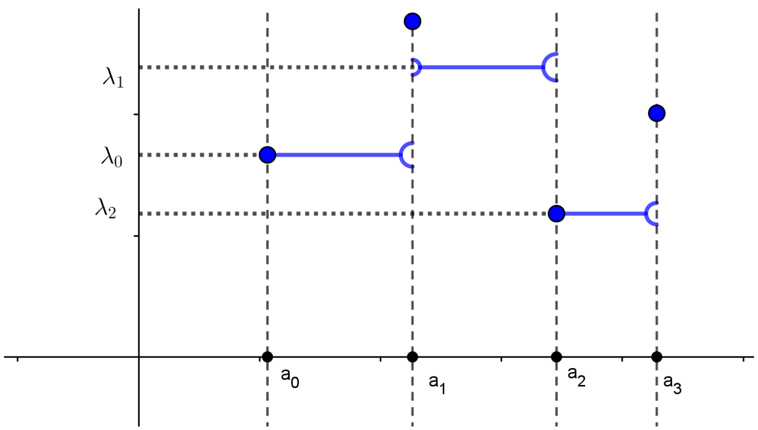
Définition 2 : Fonction en escalier (SAVOIR)

On appelle fonction en escalier tout fonction f admettant une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ telle que

$\forall i \in [[0,\ n-1]]$, f est constante sur $]a_i,\ a_{i+1}[$ Ou encore : Il existe des réel $\lambda_0,\ \ldots,\ \lambda_{n-1}$ tels que

$$\forall x \in]a_i, a_{i+1}[, \quad f(x) = \lambda_i$$

On dit que σ est une **subdivision adaptée** à f



Propriété 1 : Stabilité par C;L

Soit $f,\ g$ deux fonctions en escaliers sur$[a,\ b]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Alors $\lambda.f + \mu.g$ et $f.g$ sont aussi en escaliers sur $[a,\ b]$

Propriété 2 : Conséquence : e.v. des fonctions en escalier

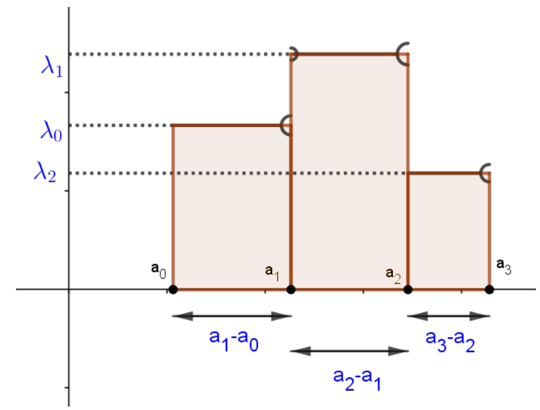
L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est un sev de $\mathcal{F}([a,b],\ \mathbb{R})$

où $\mathcal{F}([a,b],\ \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$

Définition 3 : Intégrale d'une fonction en escalier (SAVOIR)

Soit $\sigma = (a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)$ une subdivision adaptée à une fonction en escalier f telle que $\forall x \in]a_i,\ a_{i+1}[,\ f(x) = \lambda_i$.

On définit : $I_\sigma(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\lambda_i$



Ici, on a $I(f) = (a_1 - a_0)\lambda_0 + (a_2 - a_1)\lambda_1 + (a_3 - a_2)\lambda_2$

2 Sommes de Riemann

Idée : on divise le segment $[a,b]$ en n intervalles réguliers.

Chaque intervalle a donc pour longueur $\delta = \dfrac{b-a}{n}$

Donc $a_0 = a,\ a_1 = a + \delta = a + \dfrac{b-a}{n},\ a_2 = a_1 + \delta = a + 2\dfrac{b-a}{n}$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$

Sur l'intervalle $[a_k,\ a_{k+1}]$ on prend la valeur $f(a_k)$ (ou $f(a_{k+1})$)

Le rectangle de base $[a_k,\ a_{k+1}]$ a donc pour surface : $(a_{k+1} - a_k)f(a_k) = \dfrac{b-a}{n} f(a_k)$

Il reste à additionner ces rectangles, ce qui donne la somme de Riemann

Définition 4 : sommes de Riemann (SAVOIR)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$.

On définit la somme de Riemann sur le segment $[a,b]$

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

Propriété 3 : Limite de la somme de Riemann (SAVOIR)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

Propriété 4 : Somme de Riemann sur $[0,1]$ (SAVOIR)

Soit f une fonction intégrable sur $[0,1]$. Alors

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$$

Exemple 1 :

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$ Déterminer la limite de (S_n) si elle existe

$k = \frac{k}{n}n$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k/n)^2.n^2+n^2}}$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k/n)^2+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$ avec $f(x) =$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

f est continue donc intégrable sur $[0,1]$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ (Somme Riemann)

Exemple 2 :

Trouver un équivalent de $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$

$T_n = \sum_{k=1}^{n} k^4 = n^4\sum_{k=1}^{n}(k/n)^4 = n^4\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$ avec $f(x) = x^4$

$T_n = n^5\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) = n^5 S_n$ avec $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$

Or est continue donc intégrable sur $[0,1]$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 t^4\ \mathrm{d}t = \frac{1}{5}$ (Somme Riemann)

$\Rightarrow\quad T_n = n^5 S_n \sim \frac{n^5}{5}$ quand $n\to+\infty$

3 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Propriété 5 : Inégalité

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,\ b]$

Alors $\left|\int_a^b \varphi(t)\ \mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |\varphi(t)|\ \mathrm{d}t$

Démonstration

Posons d'une part : $\int_a^b \varphi(t)\ \mathrm{d}t = r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$

$\Rightarrow\quad \left|\int_a^b \varphi(t)\ \mathrm{d}t\right| = r$ et $\int_a^b \varphi(t)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}\ \mathrm{d}t = r$

Posons $\varphi(t)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta} = \psi(t) = f(t) + \mathbf{i}.g(t)$ avec $f(t),\ g(t) \in \mathbb{R}$

$\int_a^b \psi(t)\ \mathrm{d}t = r$

$\Rightarrow\quad \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = r$ et $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t = 0$

$\Rightarrow\quad r = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \le \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ avec $\psi(t) = f(t) + \mathbf{i}.g(t)$

$\Rightarrow\quad |f(t)| \le |\psi(t)| = |\varphi(t)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}| = |\varphi(t)|$

$\Rightarrow\quad \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \le \int_a^b |\varphi(t)|\ \mathrm{d}t$

Donc $\left|\int_a^b \varphi(t)\ \mathrm{d}t\right| = r = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \le \int_a^b |\varphi(t)|\ \mathrm{d}t$

fin demo

Propriété 6 : Inégalité des accroissement finis

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction C^1 sur l'intervalle I
et $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I,\ |\varphi'(t)| \leq M$
Alors $\quad \forall (x,y) \in I^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M|x-y|$

Attention : il n'y a pas d'**égalité** des accroissements finis dans $\mathbb{C}$

Exemple : $f(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}t}$ sur $[0, 2\pi]$

$f(0) = f(2\pi)$ Or $f'(t) = \mathbf{i}\mathrm{e}^{\mathbf{i}t} \quad \Rightarrow \quad |f'(t)| = 1$

On ne peut donc pas trouver $\quad c \in [0,\ 2\pi]$ tel que $\quad \dfrac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = f'(c)$

4 my Taylor is rich

Propriété 7 : Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I.
Pour tout $(a,\ b) \in I^2$, on a :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(b)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(b)$$

avec $\quad R_n(b) = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$

Démonstration

fin demo

Par récurrence sur n

- Initialisation : pour $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_0(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\ dt = f(a) + [f(t)]_a^b$$

$= f(a) + [f(b) - f(a)] = f(b)$ CQFD

- Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang n

Intégrons par parties $\quad R_n = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt$ en posant

$$\begin{cases} u(t) = f^{(n+1)}(t) & u'(t) = f^{(n+2)}(t) \\ v'(t) = \dfrac{(b-t)^n}{n!} & v(t) = -\dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$$

avec $\quad (u, v) \quad C^1$ d'après les hypothèses

$$R_n = \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + R_{n+1}$$

Remplaçons dans l'hypothèse de récurrence :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + R_{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_{n+1}$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$.

- Conclusion : la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Propriété 8 : Majoration du reste dans la formule de Taylor

Soit une fonction f de classe C^{n+1} sur un intervalle $I,\ (a,\ b) \in I^2$
et $M_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ tel que $\quad \forall t \in I, \quad \left| f^{(n+1)}(t) \right| \leq M_{n+1}$
Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

ou encore

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(b) \quad \text{avec} \quad |R_n(b)| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Démonstration

Notons plus simplement $\quad M_{n+1} = M$

La fonction f est de classe C^{n+1} sur un intervalle I.

D'après la formule de Taylor-Lagrange précédente, on a :

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| = |\ R_n\ | = \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right|$$

Il reste donc à majorer $|R_n(b)|$

- Si $a \leq b$ (bornes dans le bon sens)

  , Donc
  $$\left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right| \leq \int_a^b \left|\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\right| dt$$
  $$\Rightarrow \quad |R_n| \leq \int_a^b \frac{|b-t|^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)|dt \qquad \textbf{(1)}$$
  Pour $t \in [a,b]$, $\quad b-t \geq 0 \Rightarrow |b-t| = b-t$

  D'autre part , $\quad |f^{(n+1)}(t)| \leq M$

  Donc $\quad \dfrac{|b-t|^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)| \leq \dfrac{(b-t)^n}{n!}M$
  $$\Rightarrow \quad \int_a^b \frac{|b-t|^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)|\ dt \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}M\ dt \quad \textbf{(2)} \quad (\text{car } a \leq b)$$
  avec
  $$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}Mdt = \left[\frac{-(b-t)^{n+1}}{n+1}\frac{M}{n!}\right]_a^b$$
  $$= 0 + \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}\frac{M}{n!}$$
  $$= \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}M \quad (\text{car } b-a \geq 0) \quad \textbf{(3)}$$
  Donc, en rassemblant **(1), (2), (3)** :
  $$|R_n| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$$

- Si $a \geq b$
  $$|R_n| = \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right|$$
  $$= \left|\int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right|$$
  $$\leq \int_b^a \frac{|b-t|^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)|dt \qquad \textbf{(1)} \quad \text{car } b \leq a$$
  Pour $t \in [b,a]$, $\quad b-t \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |b-t| = t-b$

  D'autre part , $\quad |f^{(n+1)}(t)| \leq M$

  Donc
  $$|R_n| \leq \int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}Mdt \quad (\text{car } b \leq a) \quad \textbf{(2)}$$
  avec
  $$\int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}M\ dt = \left[\frac{(t-b)^{n+1}}{n+1}\frac{M}{n!}\right]_b^a$$
  $$= \frac{(a-b)^{n+1}}{n+1}\frac{M}{n!}$$
  $$= \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}M \quad (\text{car } b-a \leq 0)$$
  Donc, en rassemblant **(1)** et **(2)** :
  $$|R_n| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$$

- Dans tous les cas, l'inégalité est vérifiée

fin demo

Propriété 9 : continuité sur un segment

> Soit f une fonction <u>continue</u> sur un <u>segment</u> $[a,b]$
> Alors f est bornée sur ce segment
> C'est-à-dire qu'il existe un réel $M \in \mathbb{R}^+$ tel que
> $$\forall t \in [a,b], \quad |f(t)| \leq M$$

Propriété 10 : Formule de Taylor Young en a

> Soit une fonction f de classe C^{n+1} sur un intervalle I contenant a. Alors
> $$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$$

Démonstration

Posons, pour tout $x \in I$,
$$R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
Il faut démontrer que $\quad R(x) = o\big((x-a)^n\big)$

c'est-à-dire $\quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$

On se place sur un segment J contenant a

f est de classe C^{n+1}, donc $f^{(n+1)}$ existe et est continue.

D'après le résultat précédent, Il existe M tel que $\forall x \in J, \quad |f^{(n+1)}(t)| \leq M$

On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|R(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{R(x)}{(x-a)^n} \right| \leq \frac{|x-a|}{(n+1)!} M \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \frac{|x-a|}{(n+1)!} M = 0$$

Donc, par encadrement $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$

$$\Rightarrow \quad R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = o\big((x-a)^n\big) \quad \text{CQFD}$$

fin demo

En posant $x - a = h$ on obtient :

Propriété 11 : Formule de Taylor Young en a (2)

> Soit une fonction f de classe C^{n+1} sur un intervalle I contenant a. Alors
>
> $$\forall (a+h) \in I, \; f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o\big(h^n\big)$$