

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Mq f est une symétrie, et en déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 2 On considère les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 suivants :

$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b + c = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Calculer le projeté d'un vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G .

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ tq $f(P(X)) = P'(X) + P(1)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f .
3. Montrer que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.
4. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C} = (X^n, \dots, X, 1)$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$

- 1) Vérifier que f est une forme linéaire, et déterminer $\text{Im}(f)$.
- 2) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 5 On fixe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On considère l'application f qui à tout polynôme P associe le polynôme $f(P)$ égal au reste dans la division euclidienne de P par Q .

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.
2. Montrer qu'il s'agit d'un projecteur et expliciter ses noyau et image.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$.

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2[X]$ dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 7 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$f(P(X)) = P(X) + (1 - X)P'(X).$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Mq f est une symétrie, et en déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 2 On considère les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 suivants :

$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b + c = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Calculer le projeté d'un vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G .

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ tq $f(P(X)) = P'(X) + P(1)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f .
3. Montrer que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.
4. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C} = (X^n, \dots, X, 1)$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto \int_0^1 P(t) dt$

- 1) Vérifier que f est une forme linéaire, et déterminer $\text{Im}(f)$.
- 2) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 5 On fixe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On considère l'application f qui à tout polynôme P associe le polynôme $f(P)$ égal au reste dans la division euclidienne de P par Q .

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.
2. Montrer qu'il s'agit d'un projecteur et expliciter ses noyau et image.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$.

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2[X]$ dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 7 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$f(P(X)) = P(X) + (1 - X)P'(X).$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$.