

**Exercice 1** Dans  $\mathbb{R}^2$  Donner les matrices dans la base canonique  $(e_1, e_2)$  de  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  dans les différents cas suivants

1.  $F = \text{Vect}(e_1)$   $G = \text{Vect}(e_2)$
2.  $F = \text{Vect}(e_1)$   $G = \text{Vect}(e_1 + 2e_2)$
3.  $F = \text{Vect}(e_1 + e_2)$   $G = \text{Vect}(e_1 - 2e_2)$
4.  $F$  d'équation  $3x + 4y = 0$  et  $G$  d'équation  $3x + 2y = 0$

**Exercice 2** Dans  $\mathbb{R}^3$  Donner les matrices dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  dans les différents cas suivants

1.  $F = \text{Vect}(e_2)$   $G = \text{Vect}(e_1, e_3)$
2.  $F = \text{Vect}(e_1, e_1 + e_2 + e_3)$   $G = \text{Vect}(e_1 + 2e_2 + 3e_3)$
3.  $F$  d'équation  $x + y + z = 0$   $G = \text{Vect}(e_1 - 2e_2 - e_3)$
4.  $F = \text{Vect}(e_1 - e_2 - e_3)$  et  $G$  d'équation  $x + y = 0$

### Exercice 3 Projecteur

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p, q$  deux projecteurs de  $E$  qui commutent.

- 1) Montrer que  $p \circ q$  est un projecteur de  $E$ .
- 2) Dans  $\mathbb{R}^3$  donner deux projecteurs simples tels que  $p \circ q = q \circ p$  et  $p \circ q$  est différent de  $p$ , de  $q$  et de  $\bar{0}$  (S'inspirer de l'exo 1, question 1)  
Déterminer alors les éléments propres de  $p \circ q$  en fonction de ceux de  $p$  et  $q$ .
- 3) On revient au cas général. (\*)  
Déterminer les éléments propres de  $p \circ q$  en fonction de ceux de  $p$  et  $q$

### Exercice 4 (classique)

Soit  $E$  l'ev des matrices carrées d'ordre  $n$

On définit :  $T : E \rightarrow E, M \mapsto {}^tM$

- a) Montrer que  $T$  est une symétrie vectorielle
- b) Déterminer les éléments propres de  $T$  (cad symétrie par rapport à quoi et parallèlement à quoi?)
- c) Déterminer les projections  $p$  et  $q$  associées

### Exercice 5

Soient  $p, q \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence entre les assertions :

- (i)  $p \circ q = p$  et  $q \circ p = q$
- (ii)  $p$  et  $q$  sont des projecteurs de même noyau.

### Exercice 6

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$  et  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM$

- a) Montrer que  $f$  est linéaire
- b) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{C} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$
- c) Déterminer une base de  $\text{Ker} f$  et de  $\text{Im} f$
- d) A-t-on  $I \in \text{Im} f ? A \in \text{Im} f ?$
- e) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{C}' = (E_{2,2}, E_{1,2}, E_{1,1}, E_{2,1})$

### Exercice 7

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$  et  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA$

- a) Montrer que  $f$  est linéaire
- b) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{C} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$
- c) Déterminer une base de  $\text{Ker} f$  et de  $\text{Im} f$

### Exercice 8

Exercice 19 [ 01715 ]

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0$

- a) Montrer que  $f$  est inversible et exprimer son inverse en fonction de  $f$ .
- b) Établir que  $\text{Ker}(f - \text{Id})$  et  $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .

### Exercice 9

Soit  $\varphi$  endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par  $\varphi(P) = P(X + 1)$

- a) Écrire la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_n[X]$
- b) Justifier que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$

### Exercice 10

### Exercice 11

### Exercice 12