 FE 20a (intégration)

Exercice 1 Déterminer la limite des suites définies par :

$$\forall n \geq 1, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \sqrt[n]{2^k}.$$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\quad f : t \mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$.

1) Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
2) Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$$

Exercice 3 Calculer $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin(k\pi/n)$

Exercice 4 Prouver que pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{u}{2}\right) \leq \frac{3}{8}u^2$$

Exercice 5 Montrer que $\forall x \in [0, \pi/2]$, on a

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 6 Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$. On suppose que $|f|$ et $|f''|$ sont majorées sur $\mathbb{R}$ par M_0 et M_2

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre x et $x+a$ à l'ordre 1.
2) En déduire que $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{a}M_0 + \dfrac{a}{2}M_2$
3) Montrer que $|f'|$ est majorée sur $\mathbb{R}$ par $2\sqrt{M_0M_2}$ (Ce résultat est appelé inégalité de Kolmogorov).

Exercice 7 Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de :

$$A_n = \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{e}^{t/n}\,\mathrm{d}t \qquad B_n = \int_1^2 x\arctan(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$C_n = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t \quad D_n = \int_{-1}^2 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 1 Déterminer la limite des suites définies par :

$$\forall n \geq 1, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \sqrt[n]{2^k}.$$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\quad f : t \mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$.

1) Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
2) Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$$

Exercice 3 Calculer $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin(k\pi/n)$

Exercice 4 Prouver que pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{u}{2}\right) \leq \frac{3}{8}u^2$$

Exercice 5 Montrer que $\forall x \in [0, \pi/2]$, on a

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Exercice 6 Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$. On suppose que $|f|$ et $|f''|$ sont majorées sur $\mathbb{R}$ par M_0 et M_2

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre x et $x+a$ à l'ordre 1.
2) En déduire que $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{a}M_0 + \dfrac{a}{2}M_2$
3) Montrer que $|f'|$ est majorée sur $\mathbb{R}$ par $2\sqrt{M_0M_2}$ (Ce résultat est appelé inégalité de Kolmogorov).

Exercice 7 Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de :

$$A_n = \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{e}^{t/n}\,\mathrm{d}t \qquad B_n = \int_1^2 x\arctan(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$C_n = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t \quad D_n = \int_{-1}^2 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$$