Exercice 1 Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants : (a) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ (b) $u_n = \dfrac{\text{ch}\,(n)}{\text{ch}\,(2n)}$ $\left(\text{ch}\,x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)$

(c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ (d) $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice 2 Déterminer la nature des STG suivants :

a) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ b) $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n}$ (c) $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Exercice 3 Soit (u_n) une suite à termes positifs décroissante

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}(-1)^k u_k$ converge si et seulement si $\lim u_n = 0$

   (On pourra étudier les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}))
2. Montrer que dans ce cas, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et que $|R_n| \leq u_{n+1}$

Exercice 4

a) M.q. la série géométrique dérivée $\displaystyle\sum_{k\geq 1} kx^{k-1}$ converge ssi $|x|<1$

b) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

Calculer $(1-x)S_n$ en fonction des sommes gémétriques

c) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$

Exercice 5

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
2. Déterminer a, b, c tels que $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$
3. En déduire la somme de la série $\sum u_n$

Exercice 6

Sachant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-2}{n!}$

Exercice 7

(Règle de Raabe-Duhamel) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

a) On suppose qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

b) On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$

Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série Σu_n converge.

c) On suppose cette fois-ci que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\alpha < 1$.

Montrer que la série Σu_n diverge

Exercice 8

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$

Exercice 9

Soit $a \in]0,\ 1[$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a^{\sqrt{n}}$

Exercice 10

En exploitant une comparaison avec des intégrales, établir :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n}$ (b) $\ln(n!) \sim n\ln n$

Exercice 11

Soit $\alpha > 1$. Donner un équivalent simple à $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 12

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0;\pi]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1-\cos u_n$. Montrer que $u_n \to 0$ et déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 13
Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$. Ecrire l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre de n en 0
En déduire la somme de la série exponentielle