1) $\tan(\pi/2) =$ N'existe pas (C 101e)

2) Pour $z \in \mathbb{C}$, $\quad e^z = -\mathbf{i} \iff e^z = e^{\mathbf{i}(-\pi/2+2k\pi)}$ (C 249d)

$$\iff \boxed{z = \mathbf{i}\left(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}}$$

3) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = f(e^{2x})$ (C 419c)

$g'(x) = f'(e^{2x}) \times (2e^{2x})$ (dérivée d'une fonction composée)

4) Suite récurrente linéaire ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (C 545b)

à valeurs dans $\mathbb{R}$. <u>Cas $\Delta = 0$</u> avec $\Delta = a^2 + 4b$:

Alors les solutions <u>réelles</u> sont de la forme :

$\boxed{u_n = r_0^n(\lambda + \mu.n)}$ avec $\underline{\lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

et $\underline{r_0}$ racine(s) (double) de $\boxed{r^2 - (ar + b)}$

5) $\displaystyle\binom{n-1}{p} = \frac{n-1}{p} \times \binom{n-2}{p-1}$ pour $1 \leq p \leq n-1$ (C 629c)

6) <u>Définition</u> $f : E \to F$ est bijective (C 756b)

$\iff$ tout élément de F admet un <u>unique</u> antécédent par f dans E

> Ne surtout pas dire « toute **image** admet un unique antécédent »
> En effet, si y est une **image**, cela veut dire, par définition, que y admet déjà un antécédent.
> Donc « Toute image admet au moins un antécédent » est une tautologie
> La question question ici est de savoir si tout élément **quelconque** y de F est bien l'image d'un élément de x et d'un seul

7) La proposition suivante est **Fausse** (C 810d)

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < a \leq b \Rightarrow a^x \leq b^x$

Par exemple, pour $a = 2,\ b = 3,\ x = -1$

$a < b$ mais $a^{-1} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = b^{-1}$

> D'une façon générale : $a^x \leq b^x \iff e^{x\ln a} \leq e^{x\ln b}$
> $\iff x\ln a < x\ln b \iff x(\ln a - \ln b) < 0$
> Donc c'est faux pour $x < 0$

8) Déterminer un équivalent de $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ en $+\infty$ (C 843c)

$\ln(X) \underset{X\to 1}{\sim} X - 1$ Quand $x \to +\infty$, $\frac{x+1}{x-1} \to 1$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \sim \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{2}{x-1} \sim \frac{2}{x}$

Ou encore

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{1+1/x}{1-1/x}\right) = \ln(1+1/x) - \ln(1-1/x)$$

$\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ Quand $x \to +\infty,\ 1/x \to 0$

$\Rightarrow \ln(1+1/x) \sim 1/x$ et $\ln(1-1/x) \sim -1/x$ (équivalents de même nature $\Rightarrow f(x) \sim \frac{2}{x}$

9) Vrai ou Faux ?...**Faux** (C 919a)

$a = \arccos\frac{3}{5} \iff \cos a = \frac{3}{5}$

> L'implication est vraie, mais la réciproque fausse.
> Pour avoir l'équivalence, il faudrait :
> $a = \arccos\frac{3}{5} \iff (\cos a = \frac{3}{5}$ <u>ET $a \in [0, \pi]$</u> $)$

10) <u>Dérivabilité et dérivée de la réciproque en $y \in J$</u> (C 1036a)

Soit f une bijection de I sur J

Si f est dérivable en $x = f^{-1}(y)$ et $f'(x) \neq 0$

Alors f^{-1} est dérivable en y et $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$

> Évitez donc de justifier que f est bijective : c'est donné par l'énoncé. On ne va passer non plus sa vie entière à enfoncer des portes déjà ouvertes.
> Par contre il ne faut pas oublier le lien entre x et y

11) $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$ (C 1131a)

Déterminer le signe de f (Justifier !)

Pour tout $t \in \mathbb{R},\ g(t) = \mathrm{e}^{-t^2} > 0$

- Pour $x \geq 0,\ x \leq 2x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$

  (Bornes dans le bon sens)
- Pour $x \leq 0,\ x \geq 2x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$

12) Vrai ou Faux ? **Vrai** (C 1223b)

$$\left[\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty\right] \quad \Rightarrow \quad \text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas minorée}$$

13) Donner les 4 premiers termes non nuls du DL suivant (C 1291)

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)\end{aligned}$$

14) Si f est une fonction réelle <u>continue</u> sur un <u>intervalle</u> I (C 1420d)

Alors pour tout $(a, b) \in I$

et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe au moins un réel x_0 compris entre a et b tel que $y_0 = f(x_0)$

(C'est le théorème des valeurs intermédiaires)

- On ne peut pas écrire dans les prémisses : « f continue sur $[a, b]$ » car dans la conclusion, on a <u>pour tout</u> (a, b)
  Donc la la prémisse ne peut pas dépendre de (a, b)
- Pour que le TVI, il faut impérativement être sur un **intervalle**.

  Contre-exemple : $f : x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbb{R}^*$
  et 0 compris entre $f(-1)$ et $f(1)$.
  Mais 0 n'admet aucun antécédent par f.
  Cela ne marche pas parce que $\mathbb{R}^*$ **n'est pas un intervalle**

15) <u>Inégalité des accroissements finis sur $[a, b]$</u> (C 1602a)

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur $[a, b]$ (fermé)
- f est dérivable sur $]a,\ b[$ (ouvert)
- $\forall x \in]a,\ b[, \quad m \leq f'(x) \leq M$

Alors $\quad m \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$

(Ou encore : $\quad m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

16) $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (C 2641c)

$\dim \mathcal{A} = 3 = (2 + 1 + 0)$

A est antisymétrique ssi $\quad -A^T = A$

Donc les termes de la diagonale doivent impérativement être nuls.

En effet, $\quad A = \begin{pmatrix} a & . & . \\ . & b & . \\ . & . & c \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -A^T = \begin{pmatrix} -a & . & . \\ . & -b & . \\ . & . & -c \end{pmatrix}$

Donc A est de la forme $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

qui s'écrit comme CL de 3 matrices. Donc $\quad \dim \mathcal{A} = 3$

17) Vrai ou Faux ? **Faux** (C 2727e)

$(u_1, \dots u_p)$ famille liée de $E \quad \Rightarrow \quad \dim E < p$

On peut avoir une famille liée de p vecteurs dans un espace de dimension quelconque. (Il sufit de prendre p fois le vecteur nul).

Par contre, la réciproque est vraie :

$\dim E < p \quad \Rightarrow \quad (u_1, \dots u_p)$ est liée

18) Soient F et G deux sev de E (C 585)

$u \in F + G \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (v, w) \in F \times G,\ u = v + w$

19) Démonstration : Soient $F,\ G$ deux sev de E (C 2751e)
Montrer que $F+G$ est un sev de E

- Soit $k \in F+G$, il existe $(u,v) \in F \times G$ tel que $k = u+v$
  $\Rightarrow$ $u \in E$ et $v \in F$ $\Rightarrow$ $k = u+v \in E$ Donc $F+G \subset E$
- $\vec{0}_E \in F$ et $\vec{0}_F \in G$ $\Rightarrow$ $\vec{0}_E + \vec{0}_E \in F+G$ $\Rightarrow$ $\vec{0} \in F+G$
- soient $(k_1,\ k_2) \in (F+G)^2$ et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$
  Il existe $(u_1,\ v_1) \in F \times G$ et $(u_2,\ v_2) \in F \times G$ tels que
  $k_1 = u_1 + v_1$ et $k_2 = u_2 + v_2$
  $\Rightarrow$ $ak_1 + bk_2 = \underbrace{(au_1 + bu_2)}_{\in F} + \underbrace{(av_1 + bv_2)}_{\in G}$ car $F,\ G$ stables par CL
  $\Rightarrow$ $ak_1 + bk_2 \in F+G$

Remarque : F et G sont des sev du même e.v. E Donc ils contiennent le **même** vecteur nul $\vec{0}_E$ Donc distinguer $\vec{0}_F$ et $\vec{0}_G$ n'a ici aucun sens.

20) Soient $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2)$, $\mathcal{U} = (u_1,\ u_2)$ deux bases d'un ev E (C 2771a)
et $e_1 = u_1 + 3u_2$ $e_2 = 5u_1 + 4u_2$
Une matrice s'écrit sans calcul. Donner cette matrice, son nom et sa notation :

$P_{\mathcal{U}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(\mathcal{B})_{\mathcal{U}}$ est la matrice de passage de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{B}$

En effet, les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont exprimés en fonction de ceux de $\mathcal{U}$
Donc $\mathcal{U}$ est l'« ancienne base » et $\mathcal{B}$ est la « nouvelle base ».

21) Vrai ou Faux ? **Faux** (C 2853a)
Soit M la matrice d'une application linéaire $f : E \to F$
Si M est une matrice (n,p) alors $\dim E = n,\ \dim F = p$

22) (Propriété) Soit $f : E \to F$ est une application linéaire (C 2911b)
$\mathrm{Im} f = F$ $\iff$ f est surjective

23) (Toutourien) Soit $f : E \to F$ est une application linéaire (C 2921c)
Si $\dim E = \dim F$ finie
Alors f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective

24) Soit $E = F \oplus G,\ u \in E$ (C 2952b)
et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G
Si $u = v + w$ avec $(v,w) \in F \times G$ alors $s(u) = u - v$

25) Soient $E = F \oplus G$. (C 2961a)
et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G
Alors $u \in F$ $\iff$ $s(u) = u$

26) Définition : Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ (C 3030)
$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(C_1,\ \ldots,\ C_p)$ où $(C_1,\ \ldots,\ C_p)$ sont les colonnes de M

27) **Propriété** : $P \in \mathbb{K}[X],\ k \in \mathbb{N}$ $P^{(k)} = 0 \iff \mathrm{d}^\circ P \leq k-1$ (C 3121a)

28) Sans faire de division euclidienne, déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que (C 3152a)
$B = X+1$ divise $A = X^7 + 3X^6 + a$

B divise A $\iff$ -1 est racine de A $\iff$ $A(-1) = 0$
$\iff$ $2 + a = 0$ $\iff$ $a = -2$

29) Sans faire de division euclidienne, déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (C 3152c) tel que $B = X^2 + 1$ divise $A = X^6 + 3X^5 + aX + b$

B divise $A \iff \mathbf{i}$ est racine de $A \iff A(\mathbf{i}) = 0$

$\iff \mathbf{i}^6 + 3\mathbf{i}^5 + a\mathbf{i} + b = 0 \iff -1 + 3\mathbf{i} + a\mathbf{i} + b = 0$

$\iff a = 1,\ b = -3$ par identification car $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Il est inutile d'ajouter que $-\mathbf{i}$ est aussi racine de A car les polynômes sont **réels**

Donc $\overline{P(\mathbf{i})} = \overline{P}(\bar{\mathbf{i}}) = P(-\mathbf{i})$ car $P \in \mathbb{R}[X]$

D'où $P(\mathbf{i}) = 0 \iff P(-\mathbf{i}) = 0$

30) Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (C 3170b)

- $aX + b$ avec $a \neq 0$
- $aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$